كيفية تَكوُّن مفهوم رياضياتي لدى المتعلّم، من تصوُّرات عفوية إلى تعاريف مُجرّدة: الأثر على التعليم والتعلّم

The way how a learner's mathematical concept is formed, from spontaneous conceptions to abstract definitions: Impact on teaching and learning

عبد الهادي واقيد[1]، تمار ناجي[2]، أحمد آيت مختار[3]

1 جامعة سعد دحلب البليدة 1 (الجزائر)، HADIOUAKID@univ-blida.dz

طالب دكتوراه، مخبر الابستيمولوجيا وتاريخ الرياضيات (LEHM)، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)

2 المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)، temar08@gmail.com

3 المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)، ahmed.aitmokhtar@yahoo.fr

تاريخ الاستلام: 2022/3/2 تاريخ القبول: 2022/5/16 تاريخ النشر: 2022/6/9

ملخص: في كل لحظة من النشاط الرياضياتي، يستخدم كل من المعلم والمتعلم جوانبا شخصية تتعلق بالمفهوم المدروس، فهو يستحضر عفويا صورا ذهنية مبنية على الحدس حتى ولو كان هذا المفهوم مجرّدا. هذا قد يتعارض مع التعريف الرياضياتي المضبوط بالقواعد المنطقية. ينتج هذا التعارض لأن كل من التصورات العفوية والتعاريف المجردة هي مكونات في نفس الوقت لنفس المفهوم داخل ذهن المتعلم. من خلال هذه الدراسة، نريد التعرّف على البنية التصورية للمتعلمين، وبالخصوص فهم كيفيات تكوّن مفهوم رياضياتي ما في أذهانهم، كما نسعى لتحديد أثر ذلك على عمليتي التعليم والتعلّم.

الكلمات المفتاحية: المفهوم الرياضياتي ؛ التصورات العفوية ؛ التعريف الرياضياتي ؛ الصورة الذهنية.

Abstract : At every moment of the mathematical activity, both teacher and learner use personal aspects related to the studied concept, he spontaneously brings up mental images based on intuition even if this concept is abstract. This may contradict the mathematical definition which is built by logical rules. This conflict results because both spontaneous conceptions and abstract definitions are simultaneously components of the same concept within the learner's mind. In this study, we aim to identify the conceptual structure of learners; in particular, to understand the way of the concept formation in their minds, we also seek to determine the impact of this on the teaching and learning processes.

Keywords: mathematical concept; spontaneous conception; mathematical definition; mental image.

المؤلف المرسل: عبد الهادي واقيد

1. مقدمة:

للرياضيات مكانة هامة تعبّر عنها الحاجة المتزايدة إليها في الحياة المعاصرة، فهي أداة للنمذجة والحساب في جُلّ الاختصاصات والمستويات ومادة محورية في بعضها، لذا فإن نجاح المتعلمين مرهون بمدى تحكمهم في العلوم الرياضياتية. لا يمكن اعتبار الرياضيات علم حساب فقط، بل من المهم أن يدرك التلاميذ والطلبة أنها مصدر للدقة والصرامة وأنها في نفس الوقت تتطلب وضوح الفكر، ومن أجل هذا يجب المحافظة على التوازن بين التدريب على الحساب والتطبيق من جهة والتفكير والبرهان من جهة أخرى، وهما عنصران ضروريان لتطور الرياضيات (اللجنة الوطنية للمناهج، 2006، صفحة 2). من جهة أخرى، نجد في النشاط الرياضياتي أنّ المفاهيم لا تُستعمل عن طريق تعريفها الرسمي فقط، بل أيضا من خلال التمثيلات والصور الذهنية التي قد تختلف من إنسان إلى آخر. هذه الصور الذهنية التي كانت موجودة لدى الفرد قبل الدراسة، أو تولدت من خلال الحياة اليومية، تتداخل مع التعريف الرياضياتي (Cornu, 1981, p. 322). فخلال العمليات الذهنية في استذكار أو معالجة مفهوم ما، تتدخل عدة عوامل مرتبطة بالموضوع، بوعي أو بغير وعي، مؤثرة على المعنى والاستخدام.

من أجل ذلك يتطلّع المربون إلى إيجاد واستعمال أفضل الاستراتيجيات في التعليم والتي تؤدي إلى فهم المتعلمين والتقليل من تصوراتهم الخاطئة.

2. الإشكالية

مقارنة بميادين أخرى من النشاط البشري، غالبا ما يُنظر إلى الرياضيات على أنها بناء متماسك لا تعارض فيه وأن مفاهيمها معرفة بدِقة. لكن في الحقيقة هناك عِدَّة مفاهيم يتم التعرّف عليها بالتجربة وتُستعمل في سياق معين دون أن تكون مُعرَّفة بشكل رسمي لكنها تُفسَّر وتُدقق أكثر فيما بعد. إن استيعاب المفاهيم الرياضياتية يبدأ من خلال التفكير فيها بشكل حدسي، كما في الحياة اليومية، عن طريق الأمثلة وغيرها. وهي بداية تَشَكُّل الصور الذهنية، ثم يتم إدخال التعاريف الرياضياتية بعد ذلك. إن التلميذ أو الطالب لا يتعلم مفهوما من خلال التعريف فقط، بل من خلال التكييف والتطوير التدريجي للبُنى العقلية مع المسائل التي سمحت له الفرصة بحلها.

انطلاقا من هذا يمكن أن تساهم الأسئلة التالية في تأطير إشكالية البحث:

- ماهي المراحل التي يمر بها تكوّن المفهوم الرياضياتي لدى المتعلم؟
- ماهي الكيفية التي يتكون بها المفهوم الرياضياتي أثناء كل مرحلة أو بين مرحلتين؟
- ماهي آثار عملية تكوّن مفهوم رياضياتي ما لدى المتعلم على التعليم والتعلّم؟

3. مصطلحات الدراسة

1.3 المفهوم الرياضياتي

هو تصوّر عقلي أو تجريد ذهني يشير إلى مجموعة من العناصر أو الأشياء التي قد تختلف فيما بينها ببعض الصفات، لكنها جميعا تشترك بميزة واحدة وهي التي تعطي السمة المميزة للمفهوم (البدو، 2019، صفحة 16).

حسب (الطائي و الجميلي، 2014، صفحة 1195) فإن للمفهوم الرياضياتي عناصر ثلاث هي:

(أ) مجموعة المفهوم: تشمل مكونات ذات الصفات المتفقة مع المفهوم أو المكافئة له.

(ب) مصطلح المفهوم: وهو ذلك الاسم أو الرمز الذي يُطلق على المفهوم بناء على الخواص المشتركة بين عناصر مجموعته.

(ج) مُحتوى المفهوم: وهو تلك العبارة التي تُعطى للمفهوم وتعرفه، فهي تلخص وتجمع الخواص المتوافرة في عناصر المجموعة التي تُميزها عن غيرها من المجموعات.

2.3 تصورات عفوية عن مفهوم رياضياتي

هي تصورات أولية موجودة في ذهن المتعلم قبل أن يتم تدريسه مفهوما جديدا والتي تكون قد نشأت على سبيل المثال من تجاربه في الحياة اليومية، حيث أن أغلب المفاهيم لها معان تختلف عن المعنى الرياضياتي. فالتلميذ أو الطالب الذي سنعلمه مفهوما جديدا يملك بالفعل ما نسميه "تصورات عفوية" عن ذلك المفهوم (Cornu, 1981, p. 323).

كلمة "نهاية" مثلا هي شائعة في اللغة اليومية للمتعلمين، وعموما يتم تصوّرها عفويا على أنها شيء ثابت مثل نهاية الطريق أو حد جغرافي لا يمكن تجاوزه. وأحيانا تدل على فاصل بين شيئين، مثلا يُعتبر 0 نهاية الأعداد السالبة وبداية الأعداد الموجبة أو العكس. لكن المفهوم الرياضياتي للنّهاية مختلف تماما.

3.3 تعريف مفهوم رياضياتي

حسب تال وفينر (Tall & Vinner, 1981, p. 152) يُقصد "بتعريف مفهوم رياضياتي" شكل من الكلمات التي تستخدم لتحديد ووصف هذا المفهوم. قد يُقرأ من طرف المتعلم ثم يُربط بالمفهوم بدرجة معينة. يُعاد تشكيله بطريقة شخصية من طرف المتعلم حيث يستعمل كلمات لإعطاء تفسير خاص لصورته الذهنية المُحفَّزة حول المفهوم. سواء كان تعريف مفهوم أُعطي للمتعلم أو أعاد تشكيله بنفسه، فقد يُغيِّره من وقت لآخر. في هذه الحالة، التعريف الشخصي لمفهوم قد يختلف عن التعريف الرسمي الذي يتقبله المجتمع الرياضياتي.

4.3 الصور الذهنية عن مفهوم رياضياتي

مصطلح الصورة الذهنية حديث النشأة ومتواجد في عدة ميادين من النشاط العلمي، لكن هناك اختلافات بسيطة في تعريفه حسب اختلاف تخصص الباحثين. على العموم يمكن تحديد مفهوم الصورة الذهنية حسب دراسة (عيشاوي، 2021، صفحة 5) بأنها مجموعة من المعلومات والمعارف والانطباعات العملية التي تتكون عند الأفراد والمجتمعات تجاه فرد أو جماعة أو مؤسسة أو نظام أو شعب بعينه أو أي شيء آخر، بحيث تمثل موقفا عاطفيا أو حُكما غير مثبت، تتّسم عادة بالتحيز والذاتية وعدم التعقيد وبالعموم والتكرار على نمط أو وتيرة واحدة وعلى نحو ثابت غالبا.

وبالخصوص في تعليمية الرياضيات تُعرّف بأنها: مُجمل البنى المعرفية الموجودة في الذهن والمرتبطة بمفهوم ما، بما في ذلك التمثيلات العقلية والخصائص والعمليات التي بُنِيت مع السنوات خلال التجارب المختلفة، والتي تتغير حسب النضج والمحفزات الجديدة (Tall & Vinner, 1981, p. 152).

4. أهداف وأهمية الدراسة

تُعتبر الرياضيات من أهم المواد الدراسية، فهي لغة العلوم، التي توليها المنظومات التربوية العالمية أهمية قصوى، ومن بينها المنظومة التربوية الجزائرية، يتجلى ذلك من خلال حجمها الساعي ومعاملها في الامتحانات في مختلف المستويات. تساعد الرياضيات على إقامة الدليل عند البرهنة وعلى تكميم المعلومات مما يؤدي إلى الدقة والموضوعية وتحرض على التفكير المنطقي الخالي من التناقض، يُضاف لذلك أن

جُل العلوم تنهل من الرياضيات لأن موضوعها الكم والقياس مما يساعد العلوم الكيفية. من جهة أخرى، للرياضيات منهجها وفلسفتها وموضوعاتها وهنا تلتقي مع حقل تعليمية الرياضيات (بوداود، 2010، صفحة 11). من أهم المواضيع التي تتناولها تعليمية الرياضيات هو موضوع كيفية تصوّر المتعلم للمفاهيم الرياضياتية خاصة المجردة منها، ذلك بُغية إيجاد أنجع طرق التعليم.

اعتمادا على هذا كان أهم هدفين من هذه الدراسة هما كشف مراحل وكيفيات تكوّن مفهوم رياضياتي في ذهن المتعلم وفهم أثر ذلك على التعليم والتعلّم.

نعتقد أن معرفة المعلّم للبنية التصورية للمتعلم حول المفاهيم الرياضياتية لها أهمية كبيرة، فهي تساعد على تذليل العديد من الصعوبات المعرفية التي تحوم حول مادة الرياضيات المحتوية على العديد من المفاهيم المجردة والتي بدورها لها تعاريف رياضياتية رسمية تختلف غالبا عن النظرة التصورية الحدسية وغير الرسمية الموجودة لدى المتعلم.

5. مراحل تكوّن مفهوم رياضياتي

1.5 مستويات صياغة مفهوم رياضياتي

يُبنى كل مفهوم رياضياتي على مراحل متوالية يتم التعبير عنه في كل منها بصيغة ملائمة وذلك بمراعاة درجة نضج فكر المتعلم ومعلوماته السابقة مع استعمال اللغة المألوفة لديه. تختلف صياغة مفهوم ما حسب عدة مستويات أهمها: (أ) المستوى اللغوي من حيث التعقيد والبنية النحوية، فكل تغيير غير مناسب في اللغة ولو كان بسيطا يؤدي إلى تعقيد فهم المتعلم، (ب) المستوى الابستيمولوجي من حيث أن كل منطوق يمكن أن يكون مشكلا صريحا أو ضمنيا، (ج) المستوى الوراثي من حيث التسلسل في تقديم العمليات المنطقية الرياضياتية اعتمادا على درجة تعقيدها (طالبي، صفحة 4).

المثال الرياضياتي التالي يوضح بعض صياغات مفهوم علاقة التكافؤ (طالبي، ص4):

- صياغة أولى (ابتدائي): تعتمد على التصنيف وعدم التطرق إلى الخواص.
- صياغة ثانية (ابتدائي): تعتمد على التصنيف مع ذكر بعض الخواص دون التطرق إلى الانعكاس أو المصطلحات.
- صياغة ثالثة (متوسط): ذكر الخواص والتطرق إلى الانعكاس والمصطلحات.

- صياغة رابعة (ثانوي): تعريف علاقة التكافؤ في حالات خاصة بين مفاهيم محددة.
- صياغة رابعة (جامعي): تعريف مفهوم التكافؤ بين قضيتين في درس المنطق الرياضياتي وخواصه مع ذكر الرمز المستعمل ($\Leftrightarrow$)، ثم تعريف علاقة التكافؤ (انعكاسية وتناظرية ومتعدية).

يُضاف إلى كل ما سبق أن المتعلم يتفاعل يوميا مع وضعيات في الحياة اليومية يكتسب من خلالها عدة تصورات عن عدة مفاهيم متداخلة ومتشابهة مع ما يتلقاه في القسم. انطلاقا من هذه المكتسبات الرسمية (ناتجة من المصادر الرسمية لتعليم الرياضيات) أو غير الرسمية (ناتجة من الحياة اليومية والحدس) يُمكن التقعيد لمراحل بناء مفهوم رياضياتي جديد.

2.5 التصورات العفوية

في أولى مراحل تعلّم مفهوم جديد يعتمد التخاطب بين المعلم والمتعلم على مبدأ "ما نُعبّر عنه جيدا يُفهم جيدا"، لكن هناك فرق جوهري بين معنى خطاب المعلّم وما يتلقاه المتعلّم، لأن هذا الأخير يمتلك تصورات أولية حين يتلقى معرفة جديدة، فذهنه ليس فارغا بل فيه ما يُسمى "تصورات عفوية" عن المفهوم المُراد تعلمه.

هذه التصورات العفوية لا يمكن تجنبها وقد تشكل حواجز للتعلم ولكنها في نفس الوقت ضرورية لبناء معرفة جديدة. في غالب الأحيان لا مفر للأستاذ من استدعاء المعارف القديمة أثناء تقديم مفهوم جديد حتى يكون له معنى (مثلا اختيار أنشطة واقعية تساعد على الفهم أو استعمال أمثلة مناسبة وقابلة للاستيعاب من طرف المتعلم). يمكن أن نذكر كمثال عن ذلك التدرج في تعلم الأعداد: الأعداد الطبيعية كمعرفة سابقة لتعلم الأعداد العشرية في المستوى الابتدائي، ثم المرور إلى الأعداد النسبية السالبة في المستوى المتوسط، ثم تعلم مفهوم العدد العقدي (أو المركب) في المستوى الثانوي.

3.5 بدايات تكوّن مفهوم رياضياتي بشكل حدسي وغير رسمي

يتفق البعض من الباحثين مثل أورتون (Orton) وهايد (Heid) وكوارالا (Koirala) مع الرأي القائل إنّ أولى المفاهيم التي تُعتبر مدخلا للتحليل الرياضاتي (مثل النهايات والاشتقاق والتكامل) يجب أن تُدرّس بشكل حدسي (intuitive) وغير رسمي (informal) وذلك بالاعتماد في الأساس على المنحنيات البيانية، وإنّ الصيغ

والقواعد يجب أن تُطوَّر بعناية بشكل حدسي انطلاقا من عمل الطلبة السابق في الرياضيات والعلوم (Parameswaran, 2007, p. 194).

وإذا ألقينا نظرة على منهاج السنة الثانية ثانوي بالجزائر (اللجنة الوطنية للمناهج، 2005، صفحة 7) سنجد أثناء عرض ميدان التحليل مايلي: "نظرا لصعوبة تقديم مفهوم النهاية، في هذا المستوى، انطلاقا من التعريف الرياضياتي المعتاد، نكتفي بمقاربة تجريبية وحدسية له من خلال وضعيات ذات دلالة (كالمرور من السرعة المتوسطة إلى السرعة اللحظية في الحركة المستقيمة) تمهيدا لتقديم مفهوم العدد المشتق". ونقرأ أيضا: "نقترح تعمّقا أكثر عندما يتعلق الأمر بتقديم مفهوم نهاية متتالية أو نهاية دالة في شعبتي الرياضيات والرياضيات التقنية بتوظيف مكتسبات التلاميذ في السنة الأولى ثانوي حول المسافة والمجالات والحصر من خلال أمثلة بسيطة".

إن بداية تقديم مفهوم رياضياتي جديد لا يمكن أن تخلو من الحدس والحسّيات لضمان التدرج والفهم لدى المتعلّم. من التوصيات التي يدرجها باحثو تعليمية الرياضيات (بوداود، 2010، صفحة 11) نجد: عدم المبالغة في تدريس الرياضيات بأسلوب يطغى عليه التجريد والرمزية وإنما يجب استخدام وسائل حسية مشخِّصة لتبسيط المادة إلى أبعد حد حتى نضمن استيعاب المتعلم لها مهما كان مستواه العقلي وعمره الزمني والتخصص الذي ينتمي إليه، مادام كل إنسان في حاجة ماسة إلى الرياضيات في كل ممارساته.

4.5 التعريف الرسمي لمفهوم رياضياتي

التعاريف الرياضياتية ذات أهمية قصوى في البنية المُسلَّماتية التي تميز الرياضيات. نجاح الطلبة والتلاميذ في دراسة الرياضيات يتضمن قبولهم وفهمهم لدور التعاريف الرياضياتية. إن عبارات التعريف الرياضياتي تُجسد جوهر المفهوم المُعرَّف وتُحدِّده تماما. إضافة إلى ذلك، لا يمكن الاستغناء عنها أثناء التجارب والمهام الرياضياتية. هذه التعاريف الرياضياتية التي قد تبدو مجردة لدرجة كبيرة ليست بالضرورة موجودة لتعويض الحدس الأوّلي، بقدر ما تكون وسيلة فعلية لتقييم وتعزيز هذا الحدس. إن صعوبات المتعلمين مع التعاريف ليست ظاهرة جديدة، لقد شغلت بال واحد من أعظم الرياضياتيين في مطلع القرن العشرين وهو بوانكاريه (Poincaré) الذي يرى بأن

الحكم على جودة تعريفٍ تعتمد على الجمهور الذي يستعمله ويقول "ما هو التعريف الجيد؟ ... في التعليم هو التعريف الذي يفهمه التلاميذ" (Tall, 1988, p. 37).

إن استعمال التعاريف في سياق رياضياتي يختلف تماما عن أسلوب الحياة اليومية. إذ يمكن وصف التعريف بأسلوب الحياة اليومية على أنه شكل من الكلمات تُستخدم من طرف شخص معين لشرح مفهوم ما بطريقة واقعية وتعتمد على أمثلة واقعية. على النقيض من ذلك، فإن التعاريف الرياضياتية تكون صريحة ومبنية على أساس علمي وعقلاني، وتوضع من طرف الخبراء بهدف تسهيل وضبط الصلة بين المستخدمين والضالعين في لغة العلم.

من المهم الإشارة إلى أن جُلَّ التعاريف الرياضياتية لها تاريخ يصف بداياتها وتطورها. على سبيل المثال، التعريف المستعمل حاليا لتابع، قد لا يكون هو الذي كان مُستخدما قبل مئتي عام. إن التعاريف الرياضياتية لها ميزات عديدة بعضها أساسي وبعضها مُفضَّل لدى المجتمع الرياضياتي. يُمكن تلخيص هذه الميزات حسب (Vinner, 2002, p. 65) بالشكل التالي:

1.4.5 ميزات أساسية

- **التسلسل الهرمي:** أي مفهوم جديد يجب أن يُوصف كحالة خاصة من مفهوم أعم. مثلا المربع هو رباعي (حالة عامة) ذو أربعة أضلاع متقايسة وزاوية قائمة (حالة خاصة).
- **الوجود:** وجود مثال واحد أو حالة واحدة على الأقل من المفهوم المعرف حديثا.
- **التكافؤ:** إذا وجد أكثر من تعريف لنفس المفهوم، لابد من إظهار تكافئها.
- **التأقلم:** يجب أن يكون التعريف جزءا من نظام استنتاجي وينسجم فيه.

2.4.5 ميزات مفضلة

- **الاختصار:** يجب ذِكرُ أقلَّ عدد ممكن من الصفات الضرورية لبناء المفهوم. مثلا في تعريف مربع نذكر زاوية قائمة واحدة وليس أربعة.

- **الجمال:** عند الاختيار بين تعريفين لنفس المفهوم، نختار الذي يحتوي على كلمات ورموز أقل أو الذي يبدو أجمل. مثلا $|x|=\sqrt{x^2}$ أفضل من $|x|=\begin{cases} x, x \ge 0; \\ -x, x \le 0. \end{cases}$ بحيث x عدد حقيقي.

5.5 الصورة الذهنية عن مفهوم رياضياتي

عندما نسمع أو نرى اسم مفهوم ما، فإن ذلك يُحدِث تنبيها في ذاكرتنا، شيءٌ ما يُثار فيها، غالبا لا يكون ذلك الشيء هو تعريف المفهوم، بل ما نسميه الصورة الذهنية للمفهوم. الصورة الذهنية هي شيء غير لفظي يصاحب اسم المفهوم في أذهاننا، قد تكون تمثيلات مرئية أو مجموعة من الانطباعات والتجارب. هذه التمثيلات والانطباعات والتجارب قد تُترجم إلى صياغة لفظية، فعندما نسمع مثلا كلمة "طاولة" فإن كل واحد منا يستذكر صورة طاولة معينة. وعندما نسمع كلمة "تابع" قد نستحضر في عقولنا العبارة $y=f(x)$ أو نتخيل تمثيلا بيانيا لتابع ما، وقد نفكر في تابع معين معطى بالشكل: $y=x^2$ أو $y=\sin x$. نستخدم مصطلح الصورة الذهنية لمفهوم ما لوصف البنية الإدراكية الكاملة المرتبطة بالمفهوم، والتي تشمل كل التمثيلات والرموز الذهنية وكل الخواص والعمليات المتعلِّقة به، بما في ذلك التصورات العفوية والتعريف الرياضياتي إن كان قد دُرِس طبعا، والتي بُنيت على مَرِّ السنين خلال التجارب المتنوعة، متغيرة كلّما واجه الشخص نضوجا ومحفِّزات جديدة (Vinner, 2002, p. 65).

على سبيل المثال، مفهوم الطرح غالبا ما يُدرَّس في المرحلة الأولى على أنه عملية تشمل الأعداد الموجبة حيث يلاحِظ الطفل أن الطرح من عدد، يعطي دائما عددا أقل. تكون هذه الملاحظة جزءًا من صورته الذهنية لهذا المفهوم، وربما تتسبب له في مشاكل لاحقا عندما يدرس طرح أعداد سالبة. لهذا، فكل السِّمات العقلية المرتبطة بمفهوم، سواء كانت بوعي أو بغير وعي، تدخل تحت الصورة الذهنية للمفهوم، فهي قد تحوي بذور صراع معرفي مستقبلي (Tall & Vinner, 1981, p. 152). أظهرت الدراسة (Tall, 1988, p. 37) أن "كل شخص يبني صورته الذهنية حول مفهوم ما بطريقة قد لا تكون دوما متماسكة ومنسجمة"، وهذا يتطلّب دراسة ومعرفة آثار ذلك على التعليم والتعلّم.

6.الأثر على التعليم والتعلّم

1.6 هل تنتهي مهمة الأستاذ بمجرد تقديم التعريف الرسمي للمفهوم؟

أثناء تفاعلات الطلبة مع أساتذتهم يكونون حساسين جدا لنبرة الصوت وللمعاني المتضمَّنة، وبالتالي فعدة أفكار تُنقل لهم عن طريق الأساتذة. رغم أنه يمكن تجنب هذه المعاني في النصوص المكتوبة، إلا أنها قد تمُرّ من غير قصد من جيل إلى جيل أثناء محاولة الأساتذة لتبسيط التعقيدات من أجل مساعدة الطلبة على الفهم. مثل هذه الطرق يمكن أن تؤدي مباشرة إلى حواجز معرفية، لكن مع التأكيد أن هذه الحواجز تتطلب إعادة بناء معرفي تنطوي على فترة من الصراع والارتباك.

في مرحلة ما، يتم تقديم التعريف الرياضياتي الرسمي لمفهوم ما للمتعلم. في هذه المرحلة، يستوجب على المدرسين ومؤلفوا الكتب القيام بأكثر من مجرد تقديم التعريف، إذ عليهم بالخصوص تدريب المتعلم على استعمال التعريف كمعيار في المهام الرياضياتية، وأن يحددوا الصراعات المعرفية التي من الممكن أن تحدث، وأن يناقشوا بعمق الأمثلة الشاذة (غير النمطية) التي تساعد على دحض عدة تصورات خاطئة وأن يحتاطوا من التأثير السلبي الذي يجلبه هذا التقديم. من جهة أخرى، يعتبر استعمال الأمثلة مساعد بيداغوجيا، غير أنه يحمل خطر تشكيل صور ذهنية خاطئة في حالة استخدام نوع واحد من الأمثلة (Liang, 2016, p. 47).

إضافة إلى ذلك، فإن تقديم التعاريف والمفاهيم والتمثيلات للمتعلم دون أن يفهم لماذا يحتاجها، يجعله لا يستطيع اكتشاف تصوره الخاطئ بوضوح. فالمدرّس قد يعطي التعريف الرسمي ويعمل به لفترة قصيرة ثم يقضي فترات طويلة تكون فيها الأمثلة المعطاة كلها تفتقر للتنوع وذات نمط معين. في الواقع، إن الصور الذهنية تتأثر بشكل كبير بالأمثلة الأولى التي يتلقاها المتعلم، إذ يعتبرها نموذجا قد يعوّض التعريف، وكنتيجة لهذا العقد التعليمي تصبح عائقا أمام التفكير النظري حول المفهوم. تزويد المتعلمين بأمثلة من نمط واحد أثناء تقديم المفهوم يكون من الأسباب التي تجعلهم يطورون تصورات بعيدة عن التعريف. على النقيض من ذلك، إذا سُمح للمتعلم باكتشاف معنى المفهوم بالتعامل مع أمثلة متنوعة ومختارة بشكل جيد، فلن يتعلموا التعريف فقط بل يبنون ويطورون أيضا صورا ذهنية صحيحة.

في معظم الحالات التعليمية قد يكون المُدرِّس في وضعية اختيار لأحد المسلكين التاليين: إمّا الاستفادة من الصور الذهنية التي لدى المتعلمين بغرض تصحيحها إن كانت خاطئة أو تأكيدها وتعزيزها إن كانت صحيحة، وإمّا التقليل من أهميتها وتجاهلها، وبالتالي فإنّ الطلبة والتلاميذ يواصلون ربط تصورات حول المفهوم مستخلصة من تجاربهم في الحياة اليومية مع ما يُدرسونه في القسم.

2.6 العقد التعليمي في تعلم الرياضيات

العقد التعليمي مفهوم تم إدخاله إلى ميدان تعليمية الرياضيات من قبل بروسو (Brousseau, 1990, pp. 309-336) كمحاولة لتفسير بعض اختلالات تعلم الطلبة للرياضيات. يُقصد به مجموعة من القواعد الضمنية التي يتم تداولها في القسم والتي تحدد التفاعل بين الأستاذ والطلبة بخصوص معرفة معينة أو بعض الملامح الخاصة بمُهِمات تُعطى للطلبة. يُحدِّد العقد التعليمي بالأساس وبصفة ضمنية السلوك والتفكير المتوقع من الأستاذ والطلبة في قسمٍ للرياضيات. يُحترم هذا العقد الضمني من طرف الأستاذ بالتعليم بمحاولة جعل الطلبة يتعلمون وبإعطائهم مهام مختلفة، ويُحترم من طرف الطلبة بالتعلّم بمعالجة المهام الموكلة إليهم وفهم ما يتعلمونه وهذا بإعطاء الإجابات المتوقعة. يُوجد عقد تعليمي في كل وضعية تعليمية، إذ تظل بعض القواعد ثابتة عبر مختلف الثقافات والأقسام والأوقات. وبالتالي فالمتوقع من الأستاذ هو القيام بالتدريس مثل إعطاء مختلف المهام والمتوقع من الطلبة هو التعامل مع هذه المهام.

في مفهوم القيمة المُطلقة على سبيل المثال، نجد أنه من أهم الحواجز في تعليمه هو التصوّر بأنّه مُجرد "رمز يجب التخلّص منه". هذا التصور الخاطئ قد يكون نتيجة للعقد التعليمي المتعلق بالمفارقة التالية: أثناء تدريس مفهوم القيمة المطلقة، يتم تقديم تعريف له، لكن فيما بعد يأتي سياق حل المعادلات والمتراجحات والتي تُحلّ عن طريق التخلص من القيمة المطلقة المُتضمَّنة (Elia , Athanasios, Areti, Theodosis, & Fotini, 2009, p. 769).

في عدة أحيان يكون التعليم ناجحا عن طريق خرق العقد التعليمي، فعندما يُقيّد الطلبة أنفسهم بالعمل بالعقد التعليمي يكونون واثقين من طرقهم الحسابية في حل المشاكل الرياضياتية قبل مواجهة سياق جديد. غير أن خرق العقد يجبرهم على

"التفكير بشكل مختلف" وإدراك القيود التي تمنعهم من الفهم الجيّد ومن ثم تصحيح التصورات الخاطئة .

يتجلى سلوك الطلبة في ظل شروط العقد التعليمي في حل المشكلات الرياضياتية فيما يلي: (أ) يلتزمون بإعطاء إجابة لكل مشكلة يواجهونها، لذلك يقومون بدمج المعطيات للوصول إلى إجابة، (ب) يظنون أنه للوصول إلى إجابة، يجب عليهم استخدام جميع معطيات المشكلة بطريقة تُفعِّل العمليات المألوفة، أي العمليات العددية أو الإجراءات الحسابية، والتي يجب دمجها بشكل يُتوقع أنه موصِل للحل. لكن المطلوب من الطلبة هو أن يكونوا قادرين على اختيار المعطيات المناسبة ودمجها للوصول إلى الحل بنجاح وتخطي الحواجز، هذا التصرف الناجح يتطلب خرقا للعقد التعليمي و"العمل بشكل مستقل" (Elia , Athanasios, Areti, Theodosis, & Fotini, 2009, p. 770)

3.6 معرفة التعريف الرسمي لمفهوم رياضياتي لا تضمن الفهم الكامل

اكتساب مفهوم ما نشاطٌ معقد تُمارس فيه الوظائف العقلية الأساسية جميعها، هذا يعني أن عملية تعلّم المفهوم عملية مركبة ومرحلية تحتاج إلى عمليات متتابعة يمارسها المتعلم من خلال وجوده في مواقف تعليمية معينة، ومن ثم فإن هذه العملية هي المرحلة الأولى في نمو المفهوم التي تُبنى عليها المراحل الأخرى (البدو، 2019، صفحة 25).

نعتقد أنّ استيعاب مفهوم، يعني تكوين صورة ذهنية عنه. كما أن معرفة التعريف الرسمي (المبني على الأسس المنطقية الرياضياتية وليس الذي يتم تداوله بشكل حدسي لتقريب المعنى) للمفهوم لا يضمن تماما الفهم، حيث أن جُل المفاهيم مستوعبة، في الحياة اليومية، دون أن يتم تعريفها (مثلا: بيت، تفاحة...).

في سياق غير تقني قد تحتاج بعض المفاهيم إلى تعريف، لكن بمجرد أن يُكوِّن الشخص صورة ذهنية عن مفهوم ما فإن التعريف يُستغنى عنه ويصبح غير فعّال وأحيانا يُنسى. لكن الأمر مختلف في السياقات التقنية، فالتعريف يلعب دورا مهما جِدّا، ليس فقط في تكوين صورة ذهنية، بل غالبا ما يكون ذا أهمية قصوى في المهام المعرفية وله القدرة على إنقاذنا من الكثير من الأخطاء (Vinner, 2002, p. 67).

عندما يلتقي المتعلم بمفهوم قديم لكن في سياق جديد، فإن الصورة الذهنية للمفهوم مع جميع الأفكار الضمنية المتكوِّنة في السياقات السابقة هي التي تُستذكر حينها، وإذا كانت هذه الصورة الذهنية غير متوافقة مع التعريف، فإن ذلك سيُؤدِّي حتما إلى صرع معرفي.

إن المعرفة الحدسية ووضعيات الحياة اليومية لها تأثير كبير على فهم المعاني الرياضياتية. وبما أن التعريف الرياضياتي ليس متوافقا على العموم مع الأفكار الحدسية، فإن المتعلمين معرضون للخطأ عند حل التمارين. على أية حال، العديد من المصطلحات الرياضياتية لها معان يومية تتعارض مع الرياضيات بشكل لا شعوري (Elia , Athanasios, Areti, Theodosis, & Fotini, 2009, p. 767).

بعض المتعلمين يحتفظون بمحتوى التعريف عقليا من خلال الرسوم البيانية، بينما آخرون يحفظون العبارة الجبرية. يعتبر الرسم البياني بالتأكيد "تمثيلا ممتازا" حيث أن محتوى التعريف يُحوَّل بالكامل إلى سياق هندسي، لكن لا يجب أن نفترض أن الصورة الذهنية الناتجة عن التمثيل البياني ستكون دوما فعّالة أكثر من التي تنتج عن التعريف مباشرة

عند القيام بمهمة رياضياتية تتضمن مفهوما ما، فالدقة والصرامة الرياضياتية تتطلب من الطالب أن يعتمد في حلِّه على تعريف المفهوم، غير أن الواقع عكس ذلك غالبا، فقد أظهرت البحوث أن معظم الطلبة يستعملون الصور الذهنية للمفهوم، وبالتالي يجب إعطاء الطلبة مهام لا يمكن حلها باستخدام الصور الذهنية بل باستعمال التعريف؛ لأن الطالب إذا تمكن من الحل الصحيح بالرجوع فقط إلى الصور الذهنية فإنه سيواصل ذلك وينسى التعريف، لكن إذا فشل فسيقتنع بأن استعمال التعريف هو المعيار أثناء الحل (Vinner, 2002, p. 75). نستخلص مما سبق أيضا أن معرفة وحفظ التعريف فقط غير كافية، بل إن نجاح الطلبة في مهامهم يعتمد على قدرتهم في معرفة وتطبيق التعريف المناسب بطريقة رياضياتية مناسبة.

7. خاتمة:

إن الرياضيات بنيان متكامل ومترابط تُشكِّل المفاهيم لَبِناته الأساسية، وقد يكون مفهوم ما لبِنة بناءٍ لمفهوم رياضياتي آخر. هذا الترابط يدفعنا لأن نُعطي العناية الكاملة بطرائق تعليم وتعلّم المفاهيم الرياضياتية حتى لا يقع الخلل. لعل أهم ما يمكن معرفته أثناء تعليم معرفة جديدة هو الصراع المعرفي الذي يمكن أن يحدث بين الصور الذهنية السابقة والتعريف الرياضياتي الجديد.

تنتج التصورات الخاطئة طبيعيا من مجهود المتعلمين في بناء معارف جديدة استنادا على معارف سابقة قد تكون صحيحة أو قد تكون غير مكتملة. أغلب هذه تصورات لا يمكن تجنُّبها وربّما تعيق أحيانا تطوير فهمٍ جيد للمفاهيم الرياضياتية. لكن لا يجب أن تُعالج على أنها أشياء سيِّئة لا بد من اقتلاعها، لأن ذلك يقلل من ثقة المتعلم في معارفه السّابقة، بل إنّ تحديد الصّور الذهنية يُمكن أن يخلق فرصا جديدة للتعلّم. كما ظهر جليا أنه من الخطأ الاعتقاد أن تقديم التعريف الرياضياتي سيمحي كل تلك الصور الذهنية الخاطئة.

لا ندّعي أن أزمة تعليم الرياضيات ترجع فقط إلى الصور الذهنية الخاطئة، بل يُضاف لها العديد من العوامل العامة مثل صعوبة التواصل الرياضياتي، غير أنّه من المُستحسن الانتباه عند ربط المفاهيم الجديدة بالخبرات السابقة والظروف البيئية للمتعلمين. من المُفضل أيضا توجيه المتعلمين لكيفية استخدام التعاريف الرياضياتية وليس تقديمها لهم فقط، عن طريق إعطائهم أكبر قدر ممكن من الأمثلة والتي بدورها يجب أن تكون متنوعة وغير محدودة في نمط واحد.

8. قائمة المراجع:

قائمة المراجع العربية

ابتهال اسمر اعبودي الطائي، و هاشم محمد وحمزة الجميلي. (2014). أثر استعمال أنموذج جيرلاك وايلي في اكتساب المفاهيم الرياضية واستبقائها لدى طلبة الصف الثاني متوسط. *مجلة جامعة بابل: العلوم الإنسانية، 66*(5)، 1190–1209.

اللجنة الوطنية للمناهج. (2005). *برنامج الرياضيات للسنة الثانية من التعليم ثانوي*. الجزائر: وزارة التربية الوطنية.

اللجنة الوطنية للمناهج. (2006). *برنامج الرياضيات للسنةالثالثة من التعليم الثانوي*. الجزائر: وزارة التربية الوطنية.

أمل محمد عبد الله البدو. (2019). واقع استخدام معلمي الرياضيات تقنيات التعليم في تدريس المفاهيم الرياضية للمرحلة الثانوية في الأردن. *مجلة البحوث التربوية والتعليمية، 8*(2)، 9–42.

حسين بوداود. (2010). ديداكتيكا الرياضيات: المفهوم والنشأة. *مجلة العلوم الاجتماعية، 4*(1)، 11–21.

سهيلة عيشاوي. (2021). الصورة الذهنية للمنظومة التربوية من وجهة نظر الأولياء. *مجلة المعيار، 25*(58)، 895–917.

محمد الطاهر طالبي. (بلا تاريخ). *مقرر تعليمية الرياضيات، مطبوعة غير منشورة موجهة لتكوين الأساتذة عن بعد*. الجزائر: المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

قائمة المراجع الأجنبية

Brousseau, G. (1990). le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres. *Proceedings PME (¨sychology of Mathematics Education)*, (pp. 322-326). Grenoble, France.

Elia , I., Athanasios, G., Areti, P., Theodosis, Z., & Fotini, Z. (2009). geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Educcation, 7*, 765-790.

Liang, S. (2016). teaching the concept of limit by using conceptuel conflict strategy and desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2*(1), 35--48.

Parameswaran, R. (2007). on understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 193-216.

Tall, D. (1988). concept image and concept definition. *Senior Secondary Mathematics Education* (pp. 37-41). Netherlands: ed. Jan de Lange, Michel Doorman.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). concept image and concept definition in mathematics: With particular reference to limits and ccontiniuty. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Vinner, S. (2002). the role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, *Advancced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 65-81). Netherlands: Springer.