

Lois non paramétriques de survie: Classification et Conservation

(*)G. SAIDI, (**)A. AISSANI

* Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquées
11 rue Doudou Mokhtar, Ben-Aknoun, Alger, Algérie.

E-mail: ghsaidi@yahoo.fr

** Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène

El Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie.

E-mail: amraissani@yahoo.fr

Résumé:

Dans cet article, nous présentons une classification actualisée des lois non paramétriques basée sur la règle S-SFR(S-Starting Failure Rate). Nous donnons les résultats de conservation de ces lois d'une part par rapport aux principales opérations de fiabilité: formation des systèmes cohérents, produit de convolution et mélange de distributions ainsi que d'autres opérations décrites par certains processus stochastiques (tamisé, réparation imparfaite et choc).

Nous clôturons cet article par deux exemples d'application en fiabilité, l'un inspiré d'un cas réel (maintenance d'une installation industrielle), et l'autre plus didactique (système à deux composants parallèles).

Mots-clés: Fiabilité, Processus stochastique, Ordre stochastique, Dominance stochastique, Lois non paramétriques, Classification, Conservation.

Classification AMS: 60 K10, 60 K05, 90 K25.

1 Introduction

L'étude de fiabilité est basée sur l'utilisation des lois paramétriques usuelles (Exponentielle, Gamma, Weibull,...) qui ne permettent pas en général de pallier aux nombreux problèmes rencontrés dans la pratique des études de fiabilité: choix de la loi adéquate sur la base des données statistiques, données censurées ou aberrantes,... . Il est plus commode dans ce cas d'utiliser les lois non paramétriques de survie "de vieillissement" et leurs duales "de rajeunissement".

Les premières lois non paramétriques telles que IFR, IFRA, NBU et NBUE ont été introduites vers les années 60-70 , et depuis de nouvelles classes ont été introduites ces dernières années.

L'importance de ces lois en théorie de la fiabilité réside dans le fait que la connaissance de la classe de "vieillessement" (ou de "rajeunissement") de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision: niveau de stocks de pièces de rechange, type de maintenance (correctif ou préventif), et éventuellement le mode d'intervention, redondance,...

Dans cet article, nous présentons une classification systématique actualisée des lois non paramétriques de survie ainsi que les théorèmes de conservation de ces lois par rapport aux opérations de fiabilité. Nous mettons à la fin l'intérêt de ces lois dans la pratique des études de fiabilité.

2 Notations

X : Durée de vie d'un élément ou d'un système.

$F(t) = P(X < t)$: Probabilité de défaillance avant t .

$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$: Densité de défaillance (si f existe).

$\bar{F}(t) = 1 - F(t)$: Fonction de fiabilité (Reliability) ou probabilité de fonctionnement continu durant $(0, t)$. (parfois notée $R(t)$).

$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$: Taux de défaillance (si f existe).

$X_t = X - t$ sachant $X > t$: Durée de vie résiduelle d'un élément d'âge t .

$F_t(x) = P(X_t \leq x | X > t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)}$: Fonction de répartition de la durée de vie résiduelle.

$\mu = E(X) = MTBF = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx$: Durée de vie moyenne.

$\mu_t = E(X_t) = E(X - t | X > t) = \int_t^\infty \bar{F}(x)dx$: Durée de vie résiduelle moyenne d'un élément d'âge t .

3 Ordres stochastiques

Plusieurs ordres stochastiques ont été introduites ces dernières années dans le but de comparer deux éléments d'âges différents, de formaliser les différents stades de la vie d'un équipement en termes de ces lois non paramétriques, et d'approcher des modèles complexes par des modèles simples (comparaison de modèles).

On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition $F(\cdot)$ est stochastiquement inférieure à la variable aléatoire Y de fonction de répartition $G(\cdot)$ si $F(x) \geq G(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Cet ordre est appelé ordre stochastique ou en

distribution noté par \leq_{st} ou \leq_d . Une définition équivalente de cet ordre est donnée par:

$$X \leq_d Y \Leftrightarrow E_F(U(x)) \leq E_G(U(x)); \quad \forall U(\cdot) \uparrow \quad (1)$$

On peut également comparer deux variables aléatoires en comparant leurs espérances mathématiques (\leq_E), leurs variances (\leq_{VR}), leurs taux de défaillances (\leq_{FR}), leurs transformées de laplace (\leq_L) ou leurs fonctions génératrices (\leq_g).

Les variables aléatoires sont comparables en ordre convexe croissant (\leq_{icx} noté également \leq_c) si et seulement si (1) a lieu pour toute fonction $U(\cdot)$ croissante convexe. Elles sont comparables en ordre concave croissant (\leq_{icv} noté également \leq_{cv}) si et seulement si (1) a lieu pour toute fonction $U(\cdot)$ croissante concave.

D'autres ordres stochastiques tels que les ordres étoilé \leq_* , en rapport de vraisemblance \leq_{LR} , super-additif \leq_{su} et $t \leq_t$ peuvent être trouvés dans [19,20]. La relation entre les principaux ordres stochastiques peut être trouvée dans la synthèse de Loh (1984) et la monographie de Shaked et Shanthikumar (1994).

4 Concept de fiabilité dans la théorie économique

Plusieurs concepts de la théorie économique trouvent une interprétation fiabiliste. Ainsi, divers problèmes de la théorie économique ou de la recherche opérationnelle sont basés sur la notion d'utilité. L'utilité $U(\cdot)$ d'un élément de durée de vie X représente la valeur économique d'utiliser un élément pour un temps X . Comme les durées de vie sont des variables aléatoires, on s'intéressera souvent à l'utilité moyenne $E_F(U(X))$.

4.1 Dominance stochastique

L'ordre stochastique usuel (\leq_d ou \leq_{st}) est connu dans la théorie économique sous le nom de dominance stochastique d'ordre 1, noté \leq_{FSD} .

De même l'ordre convexe croissant est appelé dominance stochastique d'ordre 2 (type 1), noté \leq_{SSD_1} et l'ordre concave croissant est appelé dominance stochastique d'ordre deux (type 2), noté \leq_{SSD_2} .

Les économistes définissent en outre la dominance stochastique d'ordre 3 (type 1) qui est similaire à l'ordre \leq_L :

$$\begin{aligned} F \geq_{TSD_1} G &\Leftrightarrow \int_0^y \int_0^x F(t) dt dx \leq \int_0^y \int_0^x G(t) dt dx, \quad \forall 0 \leq y < \infty \\ &\Leftrightarrow E_F[U(X)] \geq E_G[U(X)], \quad \forall U > 0, U' > 0, U'' > 0. \end{aligned}$$

et la dominance stochastique d'ordre 3 (type 2):

$$F \geq_{TSD_2} G \Leftrightarrow \int_x^\infty \int_t^\infty \bar{F}(t) dt dx \leq \int_x^\infty \int_t^\infty \bar{G}(t) dt dx, \quad \forall 0 \leq x < \infty.$$

Il est clair que plus l'ordre de dominance stochastique est élevé, plus la comparaison est faible car [13,16]

$$F \text{ FSD } G \Rightarrow \begin{cases} F \text{ SSD}_1 G \Rightarrow F \text{ TSD}_1 G. \\ F \text{ SSD}_2 G \Rightarrow F \text{ TSD}_2 G. \end{cases}$$

Si F et G ont la même moyenne, alors

$$F \leq_{SSD_1} G \Leftrightarrow F \leq_{SSD_2} G.$$

4.2 Courbe de Lorenz et TTT-transformée

La courbe de Lorenz (1983) connue en théorie économique pour illustrer la distribution des revenus est définie par:

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^p F^{-1}(s) ds, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Si la distribution étudiée est le revenu d'une certaine population, alors $L(p)$ est la fraction du revenu total reçu par les 100 p % de la population qui ont le plus faible revenu.

En fiabilité statistique [1,4], les méthodes d'estimation ou de tests d'hypothèses sont basées sur la statistique $W(p)$ représentant la durée totale des essais (*scaled Total Time on Test (TTT) transform*) définie par:

$$W(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(s) ds, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Ces deux fonctions sont liées par la relation:

$$L(p) = -\frac{1}{\mu} (1-p) F^{-1}(p) + W(p), \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Dans la théorie économique, il existe une autre notion de dominance stochastique appelée dominance stochastique au sens de Lorenz qui exprime l'inégalité entre les courbes de Lorenz. Elle est définie par

$$F_1 < F_2 \Rightarrow L_1(p) \geq L_2(p), \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (2)$$

où $<$ représente l'ordre étoilé $<_*$ ou convexe $<_c$ [10].

Ce théorème signifie que F_1 représente une distribution plus régulière du revenu que ne le serait F_2 .

4.3 Mesure d'incertitude ou Entropie

La mesure d'incertitude d'une distribution ou l'entropie définie par

$$H(f) = - \int_0^{\infty} f(x) \log f(x) dx = -E(\log f(X)). \quad (3)$$

est connue également comme la mesure d'information au sens de Shannon (1948).

Ebrahimi (1992) définit l'incertitude de la distribution de la durée de vie du composant d'âge t par

$$H(f; t) = 1 - \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} f(x) \log \lambda(x) dx. \quad (4)$$

Si le composant a survécu jusqu'au temps t , $H(f; t)$ mesure l'incertitude moyenne contenue dans la densité conditionnelle de $X_t = X - t$ sachant que $X > t$, sur la prédictabilité du temps résiduel du composant.

Il existe un ordre partiel basé sur la notion d'incertitude noté par \leq_{LU} , et défini par:

$$X \leq_{LU} Y \Leftrightarrow \bar{F} \leq_{LU} \bar{G} \Leftrightarrow H(f; t) \leq H(g; t), \quad \forall t \geq 0.$$

Cet ordre est différent des ordres partiels connus dans la littérature qui sont basés sur la notion de vieillissement.

5 Classes de distributions non paramétriques

Une classe de distribution non paramétrique exprime le stade de la vie d'un équipement: jeunesse, maturité ou vieillesse. Ces classes peuvent être caractérisées en termes des ordres stochastiques définis précédemment. En général, une propriété qualitative compare la loi considérée par rapport à la loi exponentielle.

On dit que F est *IFR* (Increasing Failure Rate) si pour $x < y$, $F_y \leq_d F_x$. Dans le cas où la fonction de densité f existe ceci est équivalent au fait que

le taux de défaillance est croissant. Si le taux de défaillance cumulé $\Lambda(\cdot)$ est croissant alors on dit que F est *IFRA* (Increasing Failure Rate in Average). La distribution F est *NBU* (New Better than Used) si $F_x \leq_d F, \forall x \geq 0$. Elle est *NBUE* (NBU in Expectation) si $E(X_t) \leq E(X), \forall t \geq 0$.

En inversant les inégalités, on obtient les classes de distributions duales *DFR* (Decreasing Failure Rate), *NWU* (New Worse than Used), etc... .

Il existe d'autres classes non paramétriques introduites ces dernières années telles que *NBU-t₀*, *HNBUE*, *NBUC*, *NBUFRA*, *NBUFR*, *sBt*, *SIFR*, *IVRL*,... [19]

Il existe également des classes définies à partir de la dominance stochastique de la théorie économique. On dit que F est *IFR(2)* (Increasing Failure Rate Second Order) si $F_{t_1} \geq F_{t_2}, 0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$. Elle est *NBU(2)* (New Better than Used Second Order) si $F_t \geq_{SSD_1} F, \forall 0 \leq t < \infty$. La loi F est *HNBUE(3)* (HARMONIC New Better than Used in Expectation Third Order) si $F \geq_{TSD_2} G$ où G est la distribution exponentielle et F et G ont la même moyenne.

6 Classification des distributions non paramétriques

La première classification des distributions non paramétriques a été donnée par Barlow & Proschan (1975) et se limitait à 4 classes *IFR*, *IFRA*, *NBU* et *NBUE*.

En nous inspirant d'une approche systématique de Faguioli & Pellerey (1993) basée sur la règle S-SFR (S-Starting Failure Rate), nous proposons ici une classification plus actuelle.

Soit X une variable aléatoire absolument continue. On définit

$$\bar{T}_0(x) = f(x) \text{ et } \bar{T}_S(x) = \frac{\int_x^\infty \bar{T}_{S-1}(u) du}{\mu_{S-1}}, \quad \forall S \geq 1$$

$$\text{où } \mu_S = \int_0^\infty \bar{T}_S(u) du.$$

On définit aussi,

$$\lambda_{T_S}(x) = \frac{\bar{T}_{S-1}(x)}{\int_x^\infty \bar{T}_{S-1}(u) du} = \frac{-\frac{d}{dx} \bar{T}_S(x)}{\bar{T}_S(x)}, \quad \forall S \geq 1$$

$$\text{et } \lambda_{T_0}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ lorsque } f'(x) \text{ existe.}$$

Cette règle permet de définir de nouveaux ordres stochastiques tels que S - ST , S - CV , S - CX .

Pour $S = 1$, ces ordres coïncident avec les ordres partiels \leq_{FR} , \leq_{st} , \leq_{cv} , \leq_{cx} .

Les ordres $2-FR \iff \leq_{mr}$ et $2-ST \iff \leq_{HAMR}$ et $3-FR \iff \leq_{VR}$ sont des ordres liés aux distributions d'équilibre et utiles pour l'étude des processus stationnaires de renouvellement.

Ces ordres pour $S \geq 2$ engendrent de nouvelles classes:

1) X est $S-IFR$ ssi $\lambda_{T_S}(x)$ est non décroissant en $x \geq 0$.

2) X est $S-IFRA$ si $\int_0^x \frac{\lambda_{T_S}(u)}{x} du$ est non décroissante en $x \geq 0$.

3) X est $S-NBU$ si $\bar{T}_S(t+x) \bar{T}_S(0) \leq \bar{T}_S(t) \bar{T}_S(x)$, $\forall x, t \geq 0$.

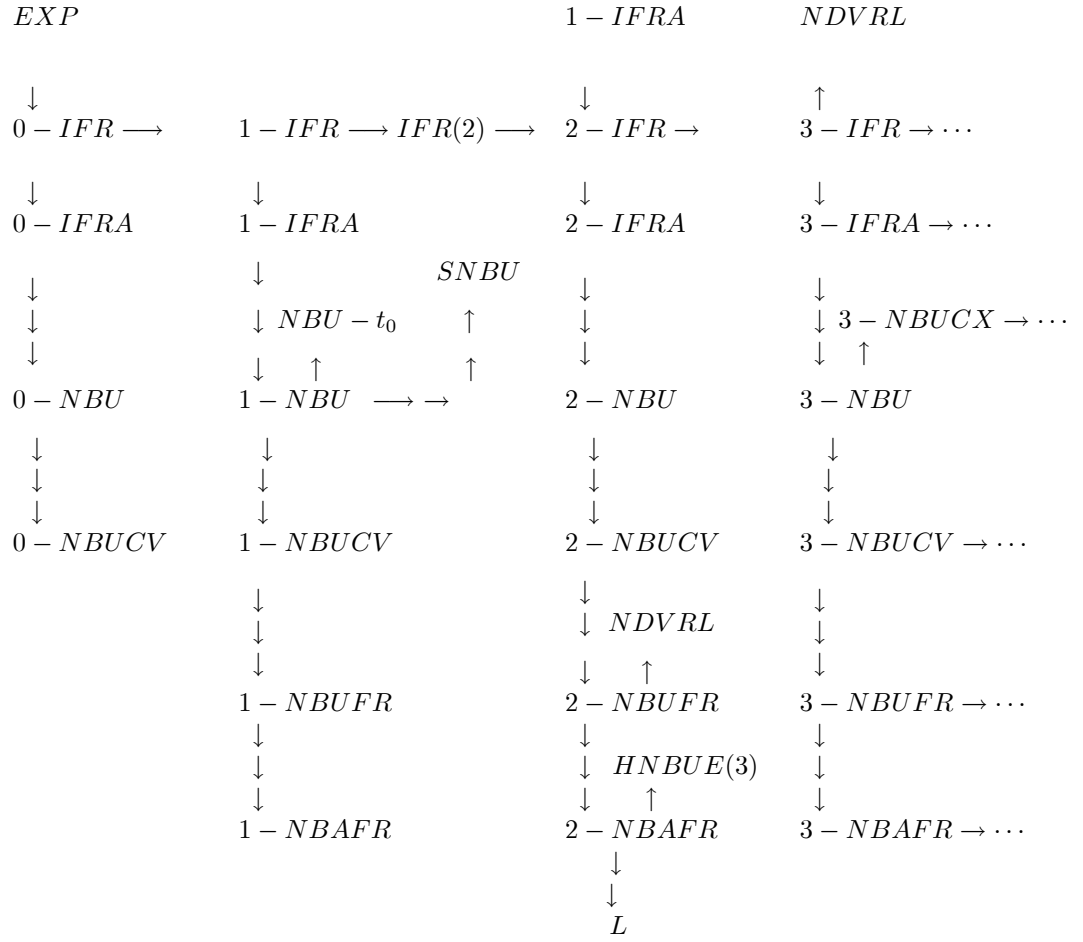
4) X est $S-NBUFR$ (ou $S-NBAFR$) si $\lambda_{T_S}(0) \leq \lambda_{T_S}(x)$, $\forall x \geq 0$.

5) X est $S-NBUFRA$ si $\lambda_{T_S}(0) \leq \frac{1}{x} \int_0^x \lambda_{T_S}(u) du$, $\forall x \geq 0$.

6) X est $S-NBUCV$ si $\bar{T}_S(0) \int_0^x \bar{T}_S(t+u) du \leq \bar{T}_S(t) \int_0^x \bar{T}_S(u) du$, $\forall x, t \geq 0$.

7) X est $S-NBUCX$ si $\bar{T}_S(0) \int_x^\infty \bar{T}_S(t+u) du \leq \bar{T}_S(t) \int_x^\infty \bar{T}_S(u) du$, $\forall x, t \geq 0$.

Le tableau suivant montre les liens entre les différentes classes de lois non paramétriques basés sur la règle S-SFR. C'est une classification qui met en évidence la relation entre un large éventail des classes non paramétriques que nous avons pu recenser dans la littérature.



On a aussi les implications suivantes:

$$1 - IFR \Rightarrow SIFR \Rightarrow SNBU$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - NBU \searrow \\ \\ 2 - NBU \nearrow \end{array} \right. 1 - NBUCX \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 1 - NBUCV \Rightarrow 2 - NBUFR \\ \Rightarrow 2 - NBUFR \end{array} \right.$$

7 Opérations sur les processus ponctuels

Diverses opérations peuvent être appliquées à un ou plusieurs processus ponctuels afin de le transformer en un nouveau processus ponctuel.

7.1 Processus tamisé

Le processus tamisé est un processus dans lequel on accepte un événement avec une probabilité p et on le rejette avec une probabilité égale à $1 - p$.

La version la plus simple du processus tamisé est décrite lorsque $\{X_j\}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes distribuées selon la distribution Bernoulli et $\{t_i\}$ un processus de renouvellement ordinaire de distribution de probabilité

$$H(x) = P\{t_j - t_{j-1} < x\}, \quad -\infty < x < +\infty \text{ et } \forall j.$$

Si Ψ représente le nombre de points censurés successivement, alors N_p est un processus de renouvellement de distribution de probabilité

$$H_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\Psi = k) H^{(k+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k H^{(k+1)}(x),$$

où $H^{(k)}(\cdot)$ est le k -uple produit de convolution de $H(\cdot)$.

Pour plus de détails sur ce processus voir [19].

7.2 Processus de réparation imparfaite

On considère qu'un équipement est mis en fonctionnement à l'instant $t = 0$, et à chaque fois qu'une panne survient, il est réparé.

Si t est l'âge de l'équipement à l'instant de panne, alors avec une probabilité $p(t)$ il retourne à l'état "aussi bon que neuf" ou "as-good-as-new" (réparation complète ou parfaite). Avec une probabilité $q(t) = 1 - p(t)$, il retourne à un état fonctionnel, mais dont l'âge est celui qu'il avait à la date de panne (réparation imparfaite i.e. l'élément est rétabli dans les conditions qui précédaient immédiatement la panne).

Le processus de réparations et de pannes se poursuit indéfiniment.

7.3 Processus de chocs

On suppose qu'un équipement est sujet à des chocs qui se produisent à des dates aléatoires $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \dots$

Le i -ème choc produit un dommage aléatoire X_i , et X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La défaillance de l'équipement se produit lorsque le dommage cumulé dépasse un niveau spécifié x .

La probabilité $\bar{H}(t)$ que l'équipement survive au delà de t est donnée par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) \bar{P}_k, \quad t \geq 0$$

où \bar{P}_k est la probabilité de survie de l'équipement aux k premiers chocs, $k = 0, 1, \dots$ et $N(t)$ est le nombre de chocs subis par l'équipement dans $[0, t]$.

8 Conservation des lois non Paramétriques

Une grande partie de la littérature de la fiabilité est consacrée aux théorèmes de conservation de ces lois par rapport aux opérations de fiabilité. Ces résultats sont utiles pour une meilleure compréhension des systèmes: interprétation, preuves des propriétés, résolution des problèmes d'optimisation (maintenance, ordonnancement, stock,...).

Le tableau 8.1 résume les principaux résultats de conservation. Il complète celui présenté par Barlow & Proschan (1975) limité aux lois *IFR*, *IFRA*, *NBU* et *NBUE*.

Le tableau 8.2 résume les théorèmes de conservation de la plupart des lois non paramétriques par rapport aux opérations décrites par les processus stochastiques: processus tamisé, processus de réparation imparfaite et processus de choc.

<i>Classe \ Opération</i>	<i>Système cohérent</i>	<i>Produit de convolution</i>	<i>mélange de distributions</i>
<i>IFR</i>	Non*	Oui	Non
<i>DFR</i>	Non	Non	Oui
<i>IFRA</i>	Oui	Oui	Non
<i>DFRA</i>	Non	Non	Oui
<i>NBU</i>	Oui	Oui	Non
<i>NWU</i>	Non	Non	Non
<i>NBUE</i>	Non	Oui	Non
<i>NWUE</i>	Non	Non	Non
<i>HNBUE</i>	Non	Oui	Non
<i>HNWUE</i>	Non	Non	Oui
<i>NBU-t₀</i>	Oui	Non	Non
<i>NWU-t₀</i>	Non	Non	Non
<i>NBUC</i>	Non	Oui	Non
<i>NWUC</i>	Non	?	Non
<i>sBt</i>	?	Oui	Non
<i>NBUFRA</i>	Oui	Oui	Non
<i>DMRL</i>	?	Non	?
<i>IMRL</i>	?	?	Oui
<i>L⁺</i>	Non	Oui	Non
<i>L⁻</i>	Non	Non	Oui

* Oui dans le cas de composants identiques.

Tableau 8.1: Conservation des classes de lois non paramétriques pour les principales opérations de Fiabilité.

<i>Lois\Processus</i>	<i>Tamisé</i>	<i>Réparation</i> $p(t) = p$	<i>imparfaite</i> $p(t) \neq p$	<i>Choc</i>
<i>IFR</i>	Non	?	Oui($p \uparrow$)	Oui
<i>DFR</i>	Oui	?	Oui($p \downarrow$)	Oui
<i>IFRA</i>	Non	?	Oui($p \uparrow$)	Oui
<i>DFRA</i>	?	?	Oui($p \downarrow$)	Oui
<i>NBU</i>	Oui	?	Oui($p \uparrow$)	Oui
<i>NWU</i>	Oui	?	Oui($p \downarrow$)	Oui
<i>NBUE</i>	Oui	?	Non	Oui
<i>NWUE</i>	Oui	?	Non	Oui
<i>L⁺</i>	Oui	?	?	?
<i>L⁻</i>	Oui	?	?	?
<i>IMRL</i>	?	?	Oui($p \downarrow$)	Oui
<i>DMRL</i>	?	?	Oui($p \uparrow$)	Oui
<i>NBUFR</i>	?	Oui	Oui($p \uparrow$)	?
<i>NBUFRA</i>	?	Oui	Oui($p \uparrow$)	?
<i>NBU-t_0</i>	?	Oui	Oui($p \uparrow$)	?
<i>sBt</i>	?	Oui	Oui($p \uparrow$)	?
<i>NWUC</i>	?	?	?	Oui
<i>SIFR</i>	?	?	?	Oui
<i>SDFR</i>	?	?	?	Oui
<i>SNBU</i>	?	?	?	Oui
<i>SNWU</i>	?	?	?	Oui

Tableau 8.2 : Conservation des lois non paramétriques liées aux transformations de processus de renouvellement

9 Application

Les études menées sur le sujet ont conduit à l'obtention de majoration de la fiabilité pour les différentes classes de distribution. En particulier, le théorème suivant donne les bornes inférieure et supérieure de la fiabilité dans le cas de la classe IFR.

Théorème:

Soit F une distribution de durée de vie *IFR* de moyenne μ , alors

$$\bar{F}(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{Si } x < \mu_r^{\frac{1}{r}} \\ \delta_x & \text{Si } x \geq \mu_r^{\frac{1}{r}} \end{cases}$$

$$\text{Où } \int_0^1 r y^{r-1} \delta_x^y dy = \frac{\mu_r}{x^r}.$$

et

$$\bar{F}(t) \geq \begin{cases} \inf_{0 \leq \beta \leq x} e^{-\beta} & \text{Si } x < \mu_r^{\frac{1}{r}} \\ 0 & \text{Si } x \geq \mu_r^{\frac{1}{r}} \end{cases}$$

$$\text{où } \int_0^{\infty} \left(\beta + \frac{x - \beta}{\alpha} z \right) e^{-z} dz = \mu_r.$$

Preuve: Voir [19]

Ce type de bornes est intéressant car elles ne nécessitent que l'information basée sur les premiers moments.

Exemple1: Détermination du type de maintenance d'un compresseur

Les données ci-dessous représentent les données sur les défaillances ou censures du composant "Pallier butée 230" de l'équipement "Compresseur du Magnaforming" récoltées lors d'une étude faite au sein de la raffinerie de pétrole de Skikda afin d'optimiser la maintenance préventive [14].

Temps (Jours)	Censures ou Défaillances	Temps (Jours)	Censures ou Défaillances	Temps (Jours)	Censures ou Défaillances
44	C	363	C	671	C
55	D	441	C	729	D
75	C	449	C	743	D
78	C	462	C	749	D
106	C	553	D	780	D
283	C	582	C	1027	D
302	C	639	D	1126	C

Tableau 9.1

L'un des objectifs de l'étude était de détecter l'appartenance ou non de la fiabilité à la classe *IFR*, ce qui fournit un indicateur du mode de maintenance à pratiquer : correctif dans le cas *DFR* ou préventif dans le cas *IFR*. La technique classique pour détecter la loi *IFR* (*DFR*) est basée sur un ajustement préalable de la fiabilité par une loi de Weibull, suivie d'une estimation du taux de défaillance: un taux supérieur à 1 indique une tendance *IFR*, alors qu'un taux inférieur à 1 indique une tendance *DFR*.

L'estimation des paramètres de la loi de Weibull correspondant aux données de [14] a été réalisée à l'aide de deux variantes de la méthode des Moindres carrés

$$\text{MC Simple : } \quad \beta = 1.40 \quad \eta = 1288 \quad z = 0.1940$$

$$\text{MC Pondéré: } \quad \beta = 2.80 \quad \eta = 889 \quad z = 0.1060$$

Où β est le paramètre de forme;
 η est le paramètre d'échelle;
 z est le résidu.

On constate que les estimateurs dépendent parfois significativement de la méthode utilisée.

Une alternative plus récente consiste à utiliser un test spécifique aux lois non paramétriques qui détecte directement la classe de distribution sans passer par un ajustement préalable par une loi de Weibull (ou toute autre loi paramétrique). L'un des tests les plus simples est le test graphique basée sur la statistique TTT (ou TTT-plot) [2].

Le tableau 9.2 fournit une courbe $(\frac{i}{r}, \alpha_i)$ représentant la TTT-Statistique empirique et qui a une allure concave indiquant l'appartenance de la fiabilité à la classe *IFR*.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	639	1382	2162	3189	3742	4491	5220	5275
$\frac{i}{r}$	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000
α_i	0.190	0.384	0.587	0.778	0.860	0.944	0.998	1.000

Tableau 9.2

Le tableau 9.3 fournit une comparaison des fiabilités estimées par les techniques classiques (Kaplan Meier et MC Pondéré) et les bornes inférieure et supérieure basées sur le moment d'ordre 1.

Temps	$\overline{F}(t)$ <i>K.M</i>	$\overline{F}(t)$ <i>Weibull</i>	B.Inf	B.Sup	Temps	$\overline{F}(t)$ <i>Weibull</i>	B.Inf	B.Sup
55	0.952	0.999	0.932	1	1035	0.216	0	0.562
553	0.865	0.767	0.495	1	1040	0.211	0	0.556
639	0.769	0.672	0.443	1	1060	0.194	0	0.533
729	0.659	0.563	0.396	1	1080	0.178	0	0.511
743	0.549	0.546	0.389	1	1100	0.162	0	0.490
749	0.439	0.538	0.386	1	1200	0.098	0	0.401
780	0.329	0.499	0.371	1	1300	0.055	0	0.331
1027	0.219	0.223	0	0.572	1400	0.028	0	0.275
1030	—	0.220	0	0.562	1500	0.013	0	0.230

Tableau 9.3

On constate que la fiabilité estimée reste dans les limites de cet encadrement. La borne supérieure est triviale jusqu'à la valeur $t = 780$ jours et la borne inférieure triviale à partir de $t = 1027$ jours.

Exemple2: Fiabilité d'un système parallèle

La distribution de survie d'un système constitué de deux éléments identiques en parallèle de distribution $F_1(t) = F_2(t) = 1 - e^{-t}$ est donnée par

$$\overline{F}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

Le temps moyen de bon fonctionnement

$$MTBF = \mu = \int_0^{\infty} \overline{F}(t) dt = \frac{3}{2}$$

Alors que le taux de défaillance

$$\lambda(t) = 1 - \frac{1}{2e^t - 1}$$

qui est strictement croissant ce qui assure le caractère *IFR* de la distribution.

Les bornes de fiabilité basées sur le moment d'ordre 1 sont données dans le tableau suivant:

Temps	$\bar{F}(t)$	B.inf	B.sup	Temps	$\bar{F}(t)$	B.inf	B.sup
0.0	1	1	1	2.4	0.1732	0	0.3580
0.2	0.9671	0.8751	1	2.6	0.1430	0	0.2942
0.4	0.8913	0.7659	1	2.8	0.1179	0	0.2437
0.6	0.7964	0.6703	1	3.0	0.0970	0	0.2031
0.8	0.6967	0.6284	1	3.2	0.0798	0	0.1703
1.0	0.6004	0.5134	1	3.4	0.0656	0	0.1435
1.2	0.5116	0.4493	1	3.6	0.0539	0	0.1214
1.4	0.4323	0	1	3.8	0.0442	0	0.1030
1.6	0.3630	0	0.8776	4.0	0.0362	0	0.0878
1.8	0.3032	0	0.6863	4.2	0.0297	0	0.07
2.0	0.2523	0	0.5456	4.4	0.0244	0	0.06
2.2	0.2093	0	0.4395	4.6	0.0200	0	0.05

Tableau 9.4

On remarque comme dans l'exemple précédent que la fiabilité théorique reste dans les limites de cet encadrement. La borne supérieure est triviale jusqu'à la valeur $t = 1.4$ et la borne inférieure est triviale à partir de $t = 1.6$.

10 Conclusion

Bien qu'actualisée, la classification présentée reste toutefois incomplète. Les résultats de conservation représente un récapitulatif de ce qui a été décrit dans la littérature de statistiques et de recherches préalable sont donnés dans le tableau 8.2. Nos résultats concernent les classes $NBUFR$, $NBUFRA$, SBt , $NBU-t_0$ pour le processus de réparation imparfaite.

Il serait intéressant de faire des études similaires pour le cas multivarié et de voir l'application de ces lois non paramétriques dans d'autres domaines de modélisation stochastique tels que Economie, Théorie de décision, Réseaux de pétri,...

References

- [1] Aissani A.; *Modèles stochastiques de la théorie de fiabilité*; Office des Publications Universitaires, Alger, 1992.
- [2] Aissani A.; *Tests statistiques pour distributions non paramétriques*; Journées de Statistiques Appliquées JSA, pp 10-19, USTHB (Alger), 30 Nov, 1 et 2 Dec 1997.

- [3] Aissani A.; *Limit distributions for dependent thinning of dissipative point process*; Microelectron.Reliab., Vol.37, N°2, pp 267-275, 1997.
- [4] Barlow R.E., Proschan F.; *statistical theory of reliability and life testing*; Holt Rinehart & Winston, Inc., New-York,1975.
- [5] Block H., Borges w., Savits T.; *Age-dependent minimal repair*; J.Appl.Prob.22, pp 370-385,1981.
- [6] Bon J.L.; *Fiabilité des systèmes*; Méthodes Mathématiques, Edition Masson, Paris, 1995.
- [7] Brown M., Proschan F.; *Impefect repair*; J.Appl.Prob.20, pp 851-859, 1983.
- [8] Chandra M., Singurpuwalla N.D.; *Relationships between notions which are common to reliability and economics*; Mathematics & Operations Research, Vol.6, pp 113-121, 1981.
- [9] Deshpande J.V., Kochar S.C, Singh H.; *Aspects of positive ageing*; J.Appl.Prob., Vol.23, pp 748-757,1986.
- [10] Ebrahim B., Pellerey F.; *New partial ordering of survival functions based on the notion of uncertainty*; J.Appl.Prob., Vol.32, pp 202-211, 1995.
- [11] Faguioli E., Pellerey F.; *New partial Ordering and applications*; Naval Research Logistics, Vol.40, pp 829-842, 1993.
- [12] Hollander M., Park D.H., Proschan F.; *A class of life distributions for ageing*; Journal of the American Statistical Association, Vol.81, N°393, pp 91-95, 1983.
- [13] Klefsjô B.; *Reliability interpretations of some concepts from economics*; Naval Research Logistics Quartely, Vol.31, pp 301-308, 1985.
- [14] Laggoune R.; *Analyse du retour d'expérience pour l'optimisation de la maintenance dans une raffinerie de pétrole.Cas du Compresseur du Magnaforming de la raffinerie de Skikda*, Thèse de Magister, INHC Boumèrdes, Nov.1998.
- [15] Lai C.D.; *Tests of univariate and bivariate stochastic ageing*; IEEE Transactions on Reliability, Vol.2, N°43, pp 231-241,1994.
- [16] Levy H.; *Stochastic dominance and expected utility: Survey and Analysis*; Management Science, Vol.37, N°4, pp 555-593, 1992.
- [17] Roy D.; *Classification of life distributions in multivariate models*; IEEE Transactions on Reliability, Vol.43, N°2, June 1994.
- [18] Saidi G., Aissani A.; *Distributions non paramétriques de fiabilité: Classification et Applications*; MFSI'2 (Modèle de Fiabilité et Science de l'Ingénieur), EMP (Bordj-el Bahri), Juin 1997 et JSA 97,USTHB, pp 160-165.

- [19] Saidi G.; *Lois non paramétriques de survie: Classification et Applications*; Thèse de Magister, I.N.P.S, Ben-Aknoun, Oct.1999.
- [20] Shaked J., Shanthikumar N.; *Stochastic order and their applications*, Academic Press, New-York, 1994.