Classe d'estimateurs dominant l'estimateur standard de la moyenne : Cas Gaussien

Mezoued Fatiha
Laboratoire de Modélisation des Phénomènes Stochastiques, ENSSEA, Kolea
famezoued@yahoo.fr

Résumé

Le présent travail consiste en l'estimation du vecteur moyenne θ d'une distribution normale multivariée $N(\theta, I_p\sigma^2)$ ou σ^2 est supposé connu. Plus précisement, nous nous intéressons à l'amelioration de l'estimateur standard $\delta_0(X) = X$.
Mots clés : estimateur minimax, paramètre de position, coût quadratique, fonction faiblement différentiable, gain de risque, estimateur admissible.

1 Introduction

En 1956, Charles Stein [Ste56] découvre un phénomène statistique dit "effet Stein" ou paradoxe de Stein. Ce phénomène consiste en la non admissibilité, sous coût quadratique, de l'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne d'une loi gaussienne p-dimentionnelle lorsque la dimension p est supérieure ou égale à 3. Plus précisément, une coupure de dimension est ainsi mise en évidence. En effet, si $p = 1$ ou si $p = 2$, le maximum de vraisemblance est admissible sous coût quadratique, en revanche, cette admissibilité est perdue pour tout $p > 2$ (cf [JS61], [Ste81]). Ce paradoxe tient du fait que, ayant un vecteur moyenne θ de dimension p à estimer, l'estimateur standard X est inadmissible, bien que, les composantes de l'estimateur sont individuellement admissibles à estimer les composantes correspondantes de dimension 1 du vecteur moyenne θ. Autrement dit, le regroupement des p estimateurs admissibles peut conduire à un estimateur inadmissible selon que $p < 3$ ou que $p > 3$.

Plus généralement, Brown [Bro66] a prouvé que l'estimateur invariant est inadmissible pour la plupart des lois d'échantillonnage et pour la plupart des fonctions coût.

Les résultats de Stein [Ste56] et Brown [Bro66] ont ouvert la voie à de nombreuses recherches dans le but de déterminer un éventuel estimateur optimal.

Dans le présent travail nous nous intéressons au cas gaussien avec $\sigma = 1$ (le cas $\sigma \neq 1$ se déduit facilement) ; nous présentons des estimateurs qui améliorent l'estimateur standard X.

2 Inadmissibilté de l'estimateur standard

Soit X un vecteur alétoire de dimension $p \geq 3$ distribué selon une loi multivariée $N_p(\theta, I_p)$. Nous considérons le problème d'estimation sous coût quadratique, du vecteur moyenne θ.

L'estimateur $\delta(x)$ est alors évalué par sa fonction risque $R(\theta, \delta) = E_\theta[\|\delta(x) - \theta\|^2]$.

L'estimateur de θ dit "standard" est $\delta_0(X) = X$, il est sans biais, il réalise le maximum de vraisemblance et il possède le minimum uniforme de la variance. Notons que son risque est constant et est égale à p.

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats concernant la minimaxité, l'admissibilté de X, ainsi que ceux relatif aux estimateurs qui l'améliorent. Le théorème suivant résume les caractéristiques de l'estimateur standard, en particulier, son inadmissibilité pour $p \geq 3$ connu sous le nom de paradoxe de Stein.

Théorème 2.1

1. *L'estimateur $\delta_0(X)$ est minimax.*
2. *$\delta_0(X)$ est admissible pour $p \leq 2$.*
3. *$\delta_0(X)$ est inadmissible pour $p \geq 3$.*

Preuve Pour la partie 1, nous considérons les distributions normales multivariées $N_p(0, mI_p)$ comme distribution a priori de θ. Dans ce contexte, la fonction de densité jointe de θ et de X est donné par

$$\begin{aligned} f(x,\theta) &\propto \exp\left(-\frac{\|x-\theta\|^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2(m+1)}\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{m+1}{m}\frac{\|\theta - mx/(m+1)\|^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2(m+1)}\right) \end{aligned}$$

Cette dernière expression, nous permet de remarquer que la distribution a posteriori de $\theta/X = x$ est la loi $N_p(mx/(m+1), m(m+1)^{-1}I_p)$, sous coût quadratique, l'estimateur de Bayes est la moyenne a posteriori et est égale à $\delta_m(X) = mX/(m+1)$. Or le risque de $\delta_m(X)$ est

$$\begin{aligned} R(\theta, \delta_m) &= E[\|\delta_m - \theta\|^2] \\ &= E[\left\|m(m+1)^{-1}(X-\theta) - \theta/(m+1)\right\|^2] \\ &= (m/(m+1))^2 p + (m+1)^{-2}\left\|\theta\right\|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, en intégrant par rapport à la loi a priori $N_p(0, mI_p)$, ceci nous permet de déduire le risque Bayésien de δ_m

$$r(\pi_m, \delta_m) = (m/(m+1))^2 p + (m+1)^{-2} pm = \frac{m}{m+1}p.$$

Comme $r(\pi_m, \delta_m)$ tend vers p, la valeur du risque de X, quand m tend vers l'infini, le lemme 5.1 assure la minimaxité de X.

Afin de conclure la partie 2, nous rappelons un résultat établi par Brown [Bro71], important pour l'admissibilté, applicable pour les distributions a priori à symétrie sphérique ; il est basé sur le comportement de la marginale $m(x)$.

Théorème 2.2 ***Brown(1971)***. *Supposons que la distribution a priori généralisé π soit à symétrie sphérique de sorte que la densité marginale m ne soit fonction de x qu'au travers $\|x\|^2$, soit $m(x) = m^*(\|x\|^2)$. Alors tout estimateur de Bayes généralisé à risque borné δ_π est admissible si et seulement si*

$$\int_1^\infty t^{-\frac{p}{2}}(m^*(t))^{-1}dt = \infty.$$

Rappelons que X est un estimateur de Bayes généralisé par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^p$ et que la densité marginale $m(x)$ est constante. l'intégrale $\int_1^\infty t^{-\frac{p}{2}}dt$ est divergente pour $p = 1, 2$, le théorème 2.2 garantit l'admissibilité de X.

Concernant la partie 3 du théorème 2.2, rappelons que l'inadmissibilté de $\delta_0(X)$ pour $p \geq 3$ a été mise en évidence par Stein [Ste56] par le biais d'une preuve non constructive, puis, James et Stein [JS61] ont déterminé une forme explicite d'un estimateur améliorant l'estimateur $\delta_0(X)$ qui fera l'objet de la section suivante.

3 Classe d'estimateurs dominants l'estimateur standard

Nous nous intéressons a une classe d'estimateurs de forme générale

$$\delta(X) = X + g(X)$$

rappelons que cette classe a été introduite par Stein [Ste81].

Tout d'abord, nous présentons une méthode simple et puissante inspirée de Stein [Ste81]. Le résultat suivant, appelé identité de Stein est essentiel

Théorème 3.3 *(Lemme de Stein). Soient $X \sim N_p(\theta, I_p)$ et $g(x)$ une fonction faiblement différentiable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $E[\|(X-\theta)' g(X)\|] < \infty$. Alors, $E_\theta[(X-\theta)' g(X] = E_\theta[\mathrm{div} g(X)]$.*

Preuve

$$\begin{aligned}
E_\theta[(X-\theta)' g(X)] &= \int_{\mathbb{R}^p} (x-\theta)' g(x) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x-\theta\|^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_0^\infty \int_{S_{R,\theta}} (x-\theta)' g(x) \exp\left(-\frac{\|x-\theta\|^2}{2}\right) d\sigma_{R,\theta}(x) dR \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_0^\infty \int_{S_{R,\theta}} \left(\frac{x-\theta}{\|x-\theta\|}\right)' g(x) d\sigma_{R,\theta}(x) R \exp(-\frac{R^2}{2}) dR
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\int_0^\infty \int_{B_{R,\theta}} \mathrm{div} g(x) dx R \exp(-\frac{R^2}{2}) dR \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \mathrm{div} g(x) \int_{\|x-\theta\|}^\infty \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} R \exp(-\frac{R^2}{2}) dR dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \mathrm{div} g(x) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x-\theta\|^2}{2}\right) dx \\
&= E_\theta[\mathrm{div} g(X)].
\end{aligned}
$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Lemme de Stein cité çi-dessus.

Corollaire 3.1 *Soit l'estimateur de θ de la forme générale $\delta(X) = X + g(X)$ où $g(x)$ est une fonction faiblement differentiable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $E_\theta[\|g(X)\|^2] < \infty$ alors*

1. $R(\theta, \delta(X)) = E_\theta[p + \|g(X)\|^2 + 2\mathrm{div} g(X)]$
2. *si $\|g(X)\|^2 + 2\mathrm{div} g(X) \leq 0$ alors $\delta(X)$ domine X (par conséquent, il est minimax), l'inegalité étant stricte sur un ensemble de mesure positive.*

Cette technique developpé par Stein est devenue une méthode standard pour prouver la minimaxité. Il est important de noter que $p + \|g(X)\|^2 + 2\mathrm{div} g(X)$ est l'estimateur sans biais du risque, aussi notons que, la condition $E_\theta[\|g(X)\|^2] < \infty$ assure la finitude du risque de l'estimateur $X + g(X)$.

3.1 Classe d'estimateur de Baranchik

Branchik [Bar70, Bar64] a proposé une famille d'estimateurs améliorés de la forme

$$
\delta_r(X) = \left(1 - \frac{r(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right) X \tag{3.1}
$$

qui une classe d'estimateurs équivariants par rapport aux transformations orthogonales ΓX et $\Gamma\theta$ pour une matrice orthogonale Γ. En explicitons la condition dans la partie 2 du corollaire 3.1 pour $g(x) = -\frac{r(\|x\|^2)}{\|x\|^2}$, nous obtenons le résultat suivant [EM76]

Corollaire 3.2 *Pour un estimateur du type (3.1), si $r(w)$ est solution de l'inégalité différentielle*

$$
r(w)(2(p-2) - r(w))/w + 4r^{'}(w) \geq 0, \tag{3.2}
$$

alors δ_r est minimax.

La condition (3.2) est satisfaite dès que

1. *$r(w)$ est monotone non décroissante.*
2. *$0 \leq r(w) \leq 2(p-2)$ pour tout $w \geq 0$.*

3.2 Classe de James et Stein

Cette classe est un cas particulier de la classe Baranchik ou $r(\omega) = a$, il est clair que cette fonction satisfait l'inégalite (3.2), les caractéristiques de cet estimateur, noté $\delta_a^{JS}(X)$, sont données dans le théorème suivant

Théorème 3.4 *Soit $X \sim N_p(\theta, I_p)$ et considérons l'estimateur $\delta_a^{JS}(X)$ alors,*

1. *$R(\theta, \delta_a^{JS}) = p + (a^2 - 2a(p-2))E_\theta[1/\|X\|^2]$ pour $p \geq 3$.*
2. *δ_a^{JS} domine δ_0 pour $0 < a < 2(p-2)$ et il est minimax.*
3. *le choix optimal de a est $a = p - 2$ pour $p \geq 3$.*
4. *Le risque en $\theta = 0$ de l'estimateur de James-Stein optimal est égale à 2 pour tout $p \geq 3$.*

Preuve

$\delta_a^{JS} = X + g(X)$ avec $g(X) = -\frac{aX}{\|X\|^2}$. nous avons $E_\theta[\|g(X)\|^2] = a^2 E_\theta[1/\|X\|^2]$ et qui est fini si $p \geq 3$. Aussi nous avons, pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{div}\frac{X}{\|X\|^2} = \frac{p-2}{\|X\|^2}$.

Nous avons donc $\|g(x)\|^2 + 2\mathrm{div}g(x) = (a^2 - 2a(p-2))E_\theta[1/\|X\|^2]$. ceci prouve 1/.

Le point 2/ est vérifie dès que $a^2 - 2a(p-2) < 0$ c'est à dire pour $0 < a < 2(p-2)$. Pour le point 3/, notons que la valeur $a = p - 2$ est optimal puisque elle minimise $R(\theta, \delta_a^{JS})$. Finalement, pour prouver le point 4/, notons qu'en $\theta = 0$, $\|X\|^2$ suit une loi khi-deux à p degré de liberté. D'ou $E_0[1/\|X\|^2] = E[1/\chi_p^2] = 1/p - 2$. Cependant, pour $p \geq 3$,

$$\begin{aligned} R(0, \delta_{p-2}^{JS}) &= p + ((p-2)^2 - 2(p-2)^2)\frac{1}{(p-2)} \\ &= p - (p-2) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Nous concluons que l'estimateur δ_{p-2}^{JS} est uniformément le meilleur estimateur dans la classe des estimateur de James-Stein. Aussi notons que en $\theta = 0$ son risque vaut 2 pout tout $p \geq 3$ et par consequent, nous avons un gain de risque important en $\theta = 0$ pour p grand.

3.3 L'estimateur Bayesien

Sous coût quadratique, l'estimateur de Bayes est la moyenne a posteriori, il s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \delta_\pi(X) &= X + \nabla \ln(m(X)) \\ &= X + \frac{\nabla m(X)}{m(X)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

où

$$m(x) \propto \int_{\mathbb{R}^p} \exp(-\frac{\|x-\theta\|^2}{2}) d\pi(\theta)$$

est la densité marginale de X.

Comme le risque de l'estimateur X est fini égal à p, alors une application directe de l'inégalité de Schwartz nous permet d'évaluer le risque de l'estimateur de Bayes par

$$\begin{aligned} R(\theta, \delta_\pi) &= E_\theta[\|X + \nabla \ln(m(X)) - \theta\|^2] \\ &= E_\theta[\|X-\theta\|^2] + E_\theta[\|\nabla \ln(m(X))\|^2] + 2E_\theta[(X-\theta)' \nabla \ln(m(X))] \\ &\leq p + E_\theta[\|\nabla \ln(m(X))\|^2] + 2(E_\theta[\|X-\theta\|^2] E_\theta[\|\nabla \ln(m(X))\|^2])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi le risque de δ_π est fini si $E_\theta[\|\nabla \ln(m(X))\|^2] < \infty$.

Relativement au corollaire 3.1, $g(x) = \frac{\nabla m(X)}{m(X)}$. Ainsi, la condition de minimaxité devient

$$\frac{\Delta m(x)}{\|\nabla m(x)\|} - \frac{1}{2} \frac{\|\nabla m(x)\|}{m(x)} \leq 0, \tag{3.4}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^p$, et qui est équivalente à $\Delta \sqrt{m(x)} \leq 0$, nous concluons donc que la minimaxité de l'estimateur Bayesien δ_π est obtenue dès que $\sqrt{m(x)}$ est surharmonique. Notons que dans la plupart des cas, cette denière condition est difficile à réaliser ; cependant, une alternative à cela est de considérer la surharmonicité de la fonction marginale $m(x)$, puisque nous avons

$$\Delta \sqrt{m(x)} = \frac{1}{2\sqrt{m(x)}} \left(\Delta m(x) - \frac{1}{2} \frac{\|\nabla m(x)\|^2}{m(x)} \right),$$

autrement dit, si $m(x)$ est surharmonique alors $\sqrt{m(x)}$ est surharmonique. Rappelons que, dans ce cadre distributionnel, Fourdrinier et al [FSW98] ont construis des classes d'estimateurs de Bayes propres et généralises minimax.

Gain de risque

Afin d'évaluer l'estimateur bayesien δ_π, considérons la loi à priori $\pi(\theta) = \frac{1}{\|\theta\|^2}$ qui est impropre, par conséquent, nous obtenons un estimateur Bayesien généralisé. Dans ce qui suit nous calculerons le risque de l'estimateur $\delta_1(x)$ relatif à $\pi(\theta) = \frac{1}{\|\theta\|^2}$ par le biais de son estimateur donné dans le Corollaire 3.1 pour $g(x) = \frac{\nabla m(X)}{m(X)}$. Tout d'abord, nous présentons le lemme suivant permettant d'exprimer la densité marginale m en tant qu'intégrale dépendant d'un paramètre sur $\mathbb{R}_+$ ou $[0, 1]$.

Lemme 3.1 *Pour la loi* a priori $\pi(\theta) = \frac{1}{\|\theta\|^{2b}}$*, la marginale relative est égale à*

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{\Gamma(b)2^b} \int_0^\infty u^{b-1}(1+u)^{-p/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2} \frac{u}{u+1}\right) du && (3.5) \\ &= \frac{1}{\Gamma(b)2^b} \int_0^1 s^{b-1}(1-s)^{p/2-1-b} \exp(-\frac{\|x\|^2}{2} s) ds && (3.6) \end{aligned}$$

Démonstration On peut présenter $\pi(\theta)$ comme un mélange de lois normales par rapport au paramètre d'échelle,

$$\|\theta\|^{-2b} = \frac{1}{\Gamma(b)2^b} \int_0^\infty u^{b-1} \exp\left(-\frac{\|\theta\|^2}{2} u\right) du.$$

Par conséquent la densité marginale est donnée par

$$\begin{aligned} m(x) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^p} p(x|\theta)\pi(\theta)\, d\theta \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \textstyle\int_{\mathbb{R}^p} \|\theta\|^{-2b} \exp\left(-\frac{\|x-\theta\|^2}{2}\right)\, d\theta \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \textstyle\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{\Gamma(b)2^b} \int_0^\infty u^{b-1} \exp\left(-\frac{\|\theta\|^2}{2} u\right) du \exp\left(-\frac{\|x-\theta\|^2}{2}\right)\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(b)2^b} (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \textstyle\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^p} u^{b-1} \exp\left(-\frac{\|\theta\|^2}{2} u\right) \exp\left(-\frac{\|x-\theta\|^2}{2}\right)\, d\theta du \end{aligned}$$

par le changement d'ordre d'intégration.

Par la relation

$$\frac{\|x-\theta\|^2}{2} + \frac{\|\theta\|^2 u}{2} = \frac{\|x\|^2}{2} \frac{u}{u+1} + \frac{\|\theta - \frac{u}{u+1} x\|^2}{2/(u+1)}$$

il vient que

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{\Gamma(b)2^b} \int_0^\infty u^{b-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2 \frac{u}{u+1}\right) \left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left(-\frac{\|\theta - \frac{u}{u+1}x\|^2}{2/(u+1)}\right) d\theta\right] du \\ &= \frac{1}{\Gamma(b)2^b} \int_0^\infty u^{b-1}(1+u)^{-p/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2 \frac{u}{u+1}\right) du. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $s = \frac{u}{u+1}$ nous obtenons alors

$$m(x) = \frac{1}{\Gamma(b)2^b} \int_0^1 s^{b-1}(1-s)^{p/2-1-b} \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2 s) ds$$

et, en particulier, quand $b = 1$

$$m(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)^{p/2-2} \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2 s) ds. \tag{3.7}$$

□

Nous allons utiliser cette forme explicite de la marginale pour calculer l'opérateur différentiel, qu'est l'estimateur sans biais du risque donné par

$$p + 2\frac{\Delta m(x)}{m(x)} - \frac{\|\nabla m(x)\|^2}{m^2(x)}. \tag{3.8}$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$S_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 s^n \, (1-s)^{p/2-2} \exp(-ts) ds.$$

Il est clair d'après (3.7) que $m(x) = S_0(\frac{\|x\|^2}{2})$ et qu'en dérivant sous le signe de l'intégration, on a $S'_n(t) = -\, S_{n+1}(t)$. On en déduit alors facilement les expressions de $\nabla m(x)$, $\Delta m(x)$, en fonction de S_n. En effet il vient que

$$\begin{aligned} \nabla m(x) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 s \, (1-s)^{p/2-2} \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2 s) ds \right) x & (3.9) \\ &= -S_1 \left(\frac{\|x\|^2}{2} \right) x & (3.10) \end{aligned}$$

Similairement on a

$$\Delta m(x) = -p \, S_1 \left(\frac{\|x\|^2}{2} \right) + S_2 \left(\frac{\|x\|^2}{2} \right) \|x\|^2, \qquad (3.11)$$

Finalement, l'estimateur du risque (3.8) s'exprime en fonction de $t = \frac{\|x\|^2}{2}$, dans la figure 1, nous avons tracé son graphe pour $p = 14$ et que nous comparons par rapport au risque de l'estimateur standard qui est égale à p. Nous constatons que le risque de l'estimateur Bayesien est inférieure à $p = 14$, par conséquent, il domine l'estimateur standard.

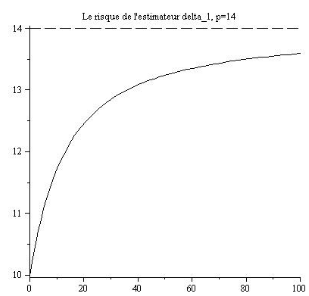

FIGURE 1 – L'estimateur du risque δ_1 par rapport à celui δ_0 qui est égale à p

La figure 2 représente le tracé de l'estimateur sans biais de la différence des risques, entre δ_0 et l'estimateur Bayesien δ_1 pour différentes valeurs de p. Nous avons observé que la différence des risques est négative dès que la dimension $p > 3$.

Dans la figure 3 nous comparons le risque de l'estimateur Bayesien δ_1 par rapport au risque de l'estimateur de James Stein δ^{JS}_{p-2}. Nous constatons que l'estimateur de James-Stein domine l'estimateur Bayesien.

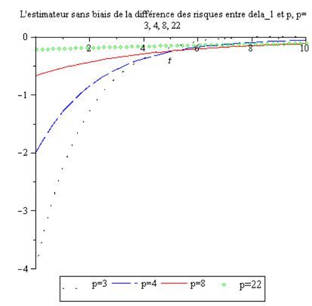

FIGURE 2 – L'estimateur sans biais de la différence du risque de l'estimateur δ_1

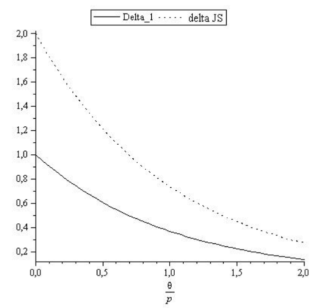

FIGURE 3 – Comparaison entre les gains en risque par rapport à δ_0, en pourcentage, entre δ_1 et δ_{JS}

4 Conclusion

Dans ce papier, pour $X \sim N_p(\theta, I_p)$, où θ est inconnu, et pour tout observation x de X, nous nous sommes intéressé à l'estimation de θ sous coût quadratique $\|x-\theta\|^2$. Nous présentons des estimateurs qui dominent l'estimateur standard, à savoir l'estimateur de James-Stein et l'estimateur Bayesien. A partir de l'exemple de loi a priori que nous avons utilisé, nous constatons que l'estimateur Bayesien n'améliore pas l'estimateur de James-Stein. Ce qui nous laisse envisager, comme perspective, la recherche d'estimateurs Bayesiens qui dominent l'estimateur de James-Stein.

Aussi notre intérêt porte sur l'utilisation d'autres fonctions coût plus générales et de considérer le cas général d'une distribution à symetrie sphérique de la forme $f(\|x-\theta\|^2)$.

5 Appendice

Lemme 5.1 *Soit π_n une suite de distributions a priori propres et soient δ_n les estimateurs de Bayes associés respectivement à π_n. Si $sup_\theta R(\theta,\delta) = \lim_{n\longrightarrow\infty} r(\pi_n,\delta_n)$, alors δ est minimax.*

Références

[Bar64] Alvin John Baranchik. *Multiple regression and estimation of the mean of a multivariate normal distribution.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1964. Thesis (Ph.D.)–Stanford University.

[Bar70] A. J. Baranchik. A family of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Math. Statist.*, 41 :642–645, 1970.

[Bro66] Lawrence David Brown. On the admissibility of invariant estimators of one or more location parameters. *Ann. Math. Statist*, 37 :1087–1136, 1966.

[Bro71] L. D. Brown. Admissible estimators, recurrent diffusions, and insoluble boundary value problems. *Ann. Math. Statist.*, 42 :855–903, 1971.

[EM76] Bradley Efron and Carl Morris. Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Statist.*, 4(1) :11–21, 1976.

[FSW98] Dominique Fourdrinier, William E. Strawderman, and Martin T. Wells. On the construction of Bayes minimax estimators. *Ann. Statist.*, 26(2) :660–671, 1998.

[JS61] W. James and Charles Stein. Estimation with quadratic loss. In *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Vol. I*, pages 361–379. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1961.

[Ste56] C. Stein. Inadmissibility of the usual estimator of the mean of a multivariate normal distribution. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1*, pages 197–206. University of California Press, Berkeley, 1956.

[Ste81] C. Stein. Estimation of the mean of multivariate normal distribution. *Annals of Statistics*, 9 :1135–1151, 1981.