

AJUSTEMENT AVEC CONTRAINTES INTERNES DES RESEAUX GEODESIQUES.

Par B. Gourine, B. Ghezali, H. Taihi

Centre National des Techniques Spatiales / Division de Géodésie
BP 13, Arzew – 31200 – ALGERIE, Fax : (213) 041 47 36 65
E-mail : gourineb@cnts.dz

ملخص:

إن الموضوع المعالج من خلال هذا المقال يتعلق بتأسيس الشبكة الجيوديزية ثنائية الأبعاد المرتكزة على طرق الضبط مع الشروط الداخلية. إن مفهوم الشروط الداخلية أو الشبكات الحرة كثير الاستعمال في الجيوديزيا نظرا لخصوصية استقلالها عن اختيار شكل النظام المرجعي (Datum). هذه الاستقلالية تسمح بإحراز الحل الأنسب للشبكة المحسوبة من غير التأثير بالعوامل الخارجية الناتجة عن النظام المرجعي. هذه الطريقة تمنح بعض المزايا كحفظ نوعية ودقة القياسات و الشكل الهندسي للشبكة. لقد أجريت تجارب على ضبط الشبكة الجيوديزية باستخدام الشروط الداخلية لمنطقة نموذجية مكونة من 13 نقطة جيوديزية من الفئة الأولى نظام "Nord Sahara 1959" و التي تقع في شمال غرب الوطن. تعتبر النتائج المحصل عليها مرضية بالنسبة للدقة المحددة في الجيوديزيا الكلاسيكية (10 ج ب م). إن معدل إرتيابات الوضعية الأفقية يساوي 16 سم مقارنة مع الضبط الكلاسيكي، أوضحت النتائج المحصل عليها قوة و فعالية الطريقة المقدمه.

Résumé:

L'étude menée à travers cet article porte sur l'établissement des réseaux géodésiques bidimensionnels basé sur les méthodes d'ajustements avec contraintes internes. La notion des contraintes internes ou des réseaux libres reste très utilisée en géodésie grâce à leur propriété d'indépendance du choix de configuration du Datum. Cette indépendance permet l'obtention d'une solution optimale du réseau estimé sans aucune influence des effets externes dus au système de référence. Cette méthode offre certains avantages tels que la conservation de la qualité des observations et de la forme géométrique du réseau. Les tests effectués ont porté sur l'ajustement d'un réseau géodésique d'une zone pilote composée de 13 points géodésiques de premier ordre "Nord Sahara 1959" situés dans la région Nord Ouest du pays. Les résultats obtenus sont jugés acceptables en vue de la précision exigée en géodésie classique (10 ppm). La moyenne des écarts types sur la position planimétrique est de l'ordre de 16 cm. A titre comparatif avec l'ajustement standard, l'analyse des résultats a révélé la puissance de la méthode présentée.

Mots clés: Ajustement, Contraintes internes, Datum, Effets externes, Réseau géodésique.

Abstract:

The study undertaken through this article concerns the establishment of the two-dimensional geodetic networks based on the methods of adjustments with inner constraints. The notion of the inner constraints or of the free networks is still very used in geodesy due to their property of independence of the Datum configuration choice. This independence allows to obtain an optimal solution of the network estimated without any influence of the external effects due to the reference frame. This method offers certain advantages such as the conservation of the quality of the observations and the geometrical form of the network. The tests carried out are related to the adjustment of a geodetic network of a pilot zone composed of 13 first order geodetic points "Nord Sahara 1959" located in the North Western area of the country. The results obtained are considered to be acceptable for the precision required in classical geodesy (10 ppm). The mean value of the standard deviation on planimetric position is about 16 cm. Comparing with the standard adjustment, the analysis of the results revealed the power of the presented method.

I. Introduction

On a coutume en géodésie de distinguer plusieurs niveaux de configuration dans la compensation des réseaux géodésiques. On peut mentionner quatre étapes, [Seemkooei, 2001], [Sillard, 1999] et [Corsilla, 1984]:

(a) configuration d'ordre zéro : résolution du problème du système de référence qui repose sur le passage des observations géodésiques aux coordonnées cartésiennes des points du réseau.

(b) configuration de premier ordre: choix des observations (matrice de configuration A).

(c) configuration de deuxième ordre: choix de la pondération des observations (matrice poids Σ).

(d) configuration de troisième ordre: addition des observations pour l'amélioration du réseau existant.

Les réseaux libres interviennent dans la configuration d'ordre zéro qui se propose de résoudre le problème du système de référence. Un réseau libre est le résultat de l'ajustement de coordonnées des stations observées sans aucune fixation du système de coordonnées. Une compensation en réseau libre conduit à une équation normale *singulière dont le déficit de rang* est inférieur ou égal à 4, les 4 degrés de liberté dans la définition du Datum planimétrique (deux translations, un facteur d'échelle et une rotation). Pour pallier à ce problème, la notion de contraintes est introduite. Les contraintes internes ou libres permettent la définition du Datum d'une façon implicite, i.e., sans fixation de points de référence. Cette caractéristique permet la compensation des réseaux sans qu'il y est une influence des erreurs dues au choix de la configuration du Datum sur la solution finale. Les tests effectués ont porté sur l'ajustement avec contraintes internes d'un réseau géodésique, d'une zone pilote composée de 13 points géodésiques du premier ordre (Nord Sahara 59) situés dans la région Nord Ouest du pays.

II. Contraintes internes (Réseau libre)

Une littérature abondante s'est développée autour du concept du réseau libre et des méthodes optimales pour déduire d'une équation normale singulière un jeu de coordonnées issu d'un choix de référentiel. Les choix usuels de contraintes à ajouter à l'équation normale singulière sont :

- un estimateur des moindres carrés de norme minimale,
- la trace minimale de la variance de cet estimateur.

Ces considérations sont purement mathématiques et s'appuient, pour réduire le déficit du rang, sur les *inverses généralisées*. Cette méthode présente la particularité de conduire, en général, à des estimateurs biaisés des coordonnées [Sillard, 1999]. Afin de remédier à ce problème, une démarche consiste à s'appuyer sur les *invariants géométriques* des systèmes de coordonnées géodésiques et à combler le déficit du rang du système normal par l'adjonction de conditions restreintes aux seuls degrés de liberté que procurent ces invariants. Pour cela, on doit satisfaire la condition suivante:

$$A \cdot G_i^T = 0 \quad (1)$$

Où, A et G_i représentent, respectivement, les matrices de configuration et des contraintes internes. G_i est construite sur les invariants géométriques du réseau.

D'après [Vanicek et al., 1995], [He et al., 1999] et [Barriot, 2003], cette condition mène à la propriété suivante:

$$\begin{aligned} \text{tr} C_{\hat{x}} &= \text{Min} \\ G_i &\in G_m \end{aligned}$$

Où, $\text{tr} C_{\hat{x}}$ représente la trace de la matrice variance covariance des paramètres (inconnues) et G_m est la matrice des *contraintes minimales*.

Ce choix particulier de G_m (c.-à-d., G_i) mène à la trace minimale de $C_{\hat{x}}$ (les plus petites variances: $[\sum \sigma^2_{xi}/n]$ minimale). Cette méthode permet alors de définir le Datum du réseau d'une manière implicite. Tous les points du réseau sont libres d'où l'appellation "*ajustement des réseaux libres*". Les contraintes internes sont des contraintes minimales appliquées sur les paramètres de transformation et non pas sur les coordonnées des stations [Altamimi, 2003].

L'approche consiste à effectuer une transformation entre deux repères $R1$ et $R2$, figure (1), par la formule suivante:

$$X_2 = T + k \cdot \theta \cdot X_1 \quad (2)$$

Avec:

T, k, θ : vecteur des translations (T_x, T_y), facteur d'échelle et rotation, respectivement.

X_1 : vecteur des coordonnées dans le repère $R1$.

X_2 : vecteur des coordonnées dans le repère $R2$.

Soit,

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} + k \times \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

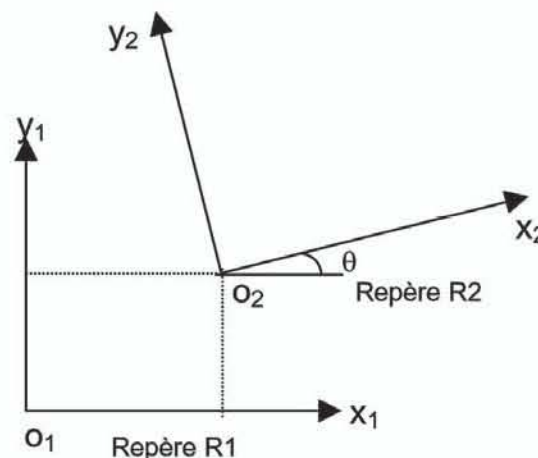


Figure .1 Passage entre le repère R1 et le repère R2

Enfin,

$$\begin{bmatrix} T_x & 0 & 0 & -y_1 \cdot k \cdot \theta \\ 0 & T_y & x_1 \cdot k \cdot \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - k \cdot x_1 \\ y_2 - k \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

Le système linéaire s'écrit alors:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_1^l & x_1^l \\ 0 & 1 & x_1^l & y_1^l \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & -y_1^n & x_1^n \\ 0 & 1 & x_1^n & y_1^n \end{pmatrix}}_{G_i} \times \underbrace{\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ \theta \\ k \end{pmatrix}}_{X_{trans}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2^l - x_1^l \\ y_2^l - y_1^l \\ \dots \\ x_2^n - x_1^n \\ y_2^n - y_1^n \end{pmatrix}}_{\Delta X} \quad (3)$$

de la forme : $G_i \cdot X_{trans} = \Delta X$

La résolution par la méthode des moindres carrés des équations normales issues du système linéaire précédent, fournit de manière unique les paramètres de transformation (X_{trans}) entre le repère $R1$ et le repère $R2$. La solution est donnée par l'équation suivante :

$$X_{trans} = (G_i^T \cdot G_j)^{-1} \cdot G_i^T \cdot \Delta X = B \cdot \Delta X \quad (4)$$

Avec: $\Delta X = X_2 - X_1$ et $B = (G_i^T \cdot G_j)^{-1} \cdot G_i^T$

L'objectif est de caler le repère R2 sur le repère R1 (c.-à-d., tel que le vecteur des paramètres de transformation X_{trans} soit nul $\Rightarrow T_x = T_y = 0, \theta = 0, k = 0$). Pour que cette condition soit vérifiée ($X_{trans} = 0$), il faut que: $B \cdot \Delta X = 0$.

Utilisant $B = (G_i^T \cdot G_j)^{-1} \cdot G_i^T$, contenant toute l'information nécessaire permettant de définir le Datum, on introduit une équation de contraintes internes à $\Sigma_{X_{trans}}$ près, sous la forme:

$$B \cdot (X_2 - X_1) = B \cdot \Delta X = 0 \quad (\Sigma_{X_{trans}})$$

Avec:

$\Sigma_{X_{trans}}$: matrice diagonale des variances des 4 paramètres de transformation.

ΔX : vecteur des différences de coordonnées entre X_2 et X_1 .

En terme d'équation normale, l'équation de contraintes internes devient:

$$B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B \cdot (X_2 - X_1) = 0 \quad (5)$$

En choisissant une solution de référence $X_1 = X_R$ (exemple: repère géodésique "Nord Sahara 59") et une solution estimée $X_2 = X_{estim}$ (issue de l'ajustement), l'équation des contraintes internes devient:

$$B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B \cdot \hat{X} = B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B \cdot (X_R - X_0) \quad (6)$$

Avec: $\hat{X} = X_{estim} - X_R$

Le système normal non contraint s'écrit:

$$(A^T \sum A) \hat{X} = A^T \cdot \sum \cdot L$$

Ou, $N \cdot \hat{X} = K \quad (7)$

Avec:

N : matrice normale non contrainte;

$\hat{X} = X_{estim} - X_0$: vecteur des inconnues du réseau;

X_{estim} : vecteur des coordonnées ajustées (compensées);

X_0 : vecteur des coordonnées approchées (à priori);

\sum : matrice poids des observations.

L : vecteur des observations.

K : vecteur des observations normalisées.

En combinant les équations (6) et (7), on obtient:

$$(N + B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B) \cdot \hat{X} = K + B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B \cdot (X_R - X_0)$$

Le repère R2 correspond au repère issu de la compensation des observations du réseau géodésique (*réseau compensé ou ajusté*: X_{estim}). Si la solution de référence X_R (repère de référence R1) est choisie initialement comme étant la solution à priori ou approchée X_0 (exemple: Nord Sahara 1959), le système d'équations normales avec contraintes internes devient [Altamimi, 2003]:

$$(N + B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B) \cdot (\hat{X}) = K \quad (8)$$

D'où:

$$\hat{X}^+ = (N + B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B)^{-1} \cdot K \quad (9)$$

L'écart type à posteriori de l'unité du poids est estimé par la formule:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \sum V}{m - n} \quad (10)$$

Avec:

V, \sum : vecteur des résidus et matrice poids des observations, respectivement.

m, n : nombre d'observations et nombre de paramètres inconnus, respectivement.

La matrice de variance-covariance des paramètres est déterminée par:

$$C_{\hat{X}^+} = \hat{\sigma}_0^2 (N + B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B)^{-1} N (N + B^T \cdot \sum_{X_{trans}}^{-1} B)^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^+ \quad (11)$$

Avec:

N^+ : Pseudo-inverse; ou inverse de Moore Penrose; de la matrice N .

La propriété de N^+ est que sa trace est minimale parmi toute les inverses généralisées de N . A cause de cette propriété, la solution \hat{X}^+ de l'équation (9) est appelée solution de la norme minimale [Hwang et al., 2002].

Il est important de souligner que cette méthode des contraintes internes est efficace pour:

- résoudre le problème de singularité du système des équations normales,
- fournir (compléter) la définition du Datum du réseau,
- conserver la qualité originale des observations.

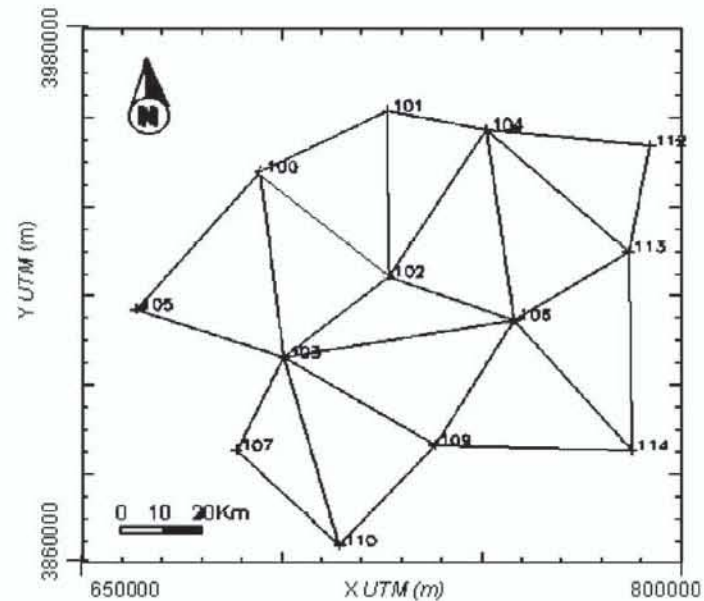


Figure. 2 Configuration du réseau test - zone pilote

III. Application

III.1 Présentation du réseau test

Les données géodésiques utilisées lors du traitement sont constituées de 50 mesures angulaires effectuées à partir de 13 points géodésiques du premier ordre situés dans la région Nord Ouest du pays. Le jeu d'observations de cette zone pilote a été fourni par l'Institut National de Cartographie et de Télédétection (INCT), en tant qu'organisme responsable des données géodésiques en Algérie. La précision des observations angulaires est de ± 7 déci milligrades.

Le système géodésique utilisé est le Nord Sahara 1959 et la projection cartographique employée est UTM (Universal Transverse Mercator) calculée sur l'ellipsoïde Clarke 1880A. La figure (2) illustre la configuration du réseau test.

III.2 Résultats

Tous les résultats présentés ci-dessous sont fournis par le logiciel d'ajustement et d'analyse des réseaux géodésiques bidimensionnels dénommé "CHABAKA", développé au niveau de la division de Géodésie du Centre National des Techniques Spatiales (CNTS) [Gourine, 2004].

Cet outil a l'avantage d'intégrer d'une part, une gamme de modèles d'ajustement avec contraintes de canevas géodésiques afin d'élargir son champ d'application (réseaux géodésiques et cadastraux, auscultation d'ouvrages d'art et de sites industriels, surveillance sismique, etc.) et d'autre part, une diversité d'outils d'analyse des résultats (statistiques, fiabilité, robustesse, S-Transformation). En outre, il présente un caractère évolutif dans la possibilité d'enrichir le logiciel par d'autres modules de traitement selon la dynamique des applications.

Le tableau (1) illustre les statistiques de l'ajustement avec contraintes internes du réseau test. D'après ce tableau :

- L'ensemble des résidus des observations suivent une loi normale puisque le test du Khi-2 est positif.
- Le test de Student n'a révélé aucune observation suspecte qui soit hors intervalle de confiance $[-2\text{dmgr}, +2\text{dmgr}]$.
- Les résidus normalisés suivent une loi normale réduite puisque le test de Tau est positif.

Par conséquent, les observations sont jugées de bonne qualité et ne contiennent pas de grosses erreurs. Les résultats fournis par l'ajustement des paramètres du réseau sont donnés par les tableaux (2) et (3) :

Nombre des paramètres	Nombre des observations	Nombre des paramètres du Datum	Ecart type à priori σ_0	Ecart type à posteriori $\hat{\sigma}_0$	Test du Khi-2	Test de Student	Test de Tau
39	50	04	08 dmgr	02 dmgr	positif	0 obs. suspecte	positif pour chaque résidu

Tableau. 1 Statistiques de l'ajustement du réseau

	dV0 (dmgr)	dx (m)	dy (m)
Min	0.	-0.115	-0.236
Max	2.	0.149	0.178
Moyenne	1.	0.000	-0.047

Tableau. 2 Paramètres ajustés du réseau

	σ_{v0} (dmgr)	σ_x (m)	σ_y (m)	σ_{position} (m)	ρ_{xy}	ρ_{xv0}	ρ_{yv0}
Min	1.	0.063	0.061	0.087	-0.67	-0.23	-0.34
Max	2.	0.179	0.178	0.222	0.77	0.62	0.40
Moyenne	2.	0.103	0.122	0.160	-0.05	0.09	-0.08
Moyenne absolue	-	-	-	-	0.33	0.17	0.19

Tableau. 3 Précisions σ et corrélations ρ des paramètres du réseau

D'après le tableau (3), nous constatons que :

- la précision géodésique est bien respectée puisque la moyenne des précisions en position est de ± 16.0 cm et en direction de ± 2 dmgr.
- il existe une cohérence entre les précisions angulaire et planimétrique. En effet, une erreur angulaire de ± 2 dmgr représente sur le terrain, pour une base de 40 km (réseau du 1^{er} ordre), une erreur en position de $\approx \pm 12$ cm qui est sensiblement égale à la précision planimétrique obtenue ($\approx \pm 16$ cm).
- la corrélation est en dessous de 34%, ce qui permet de conclure que les paramètres du réseau sont indépendants.

A titre comparatif avec la méthode d'ajustement classique, une analyse des résultats issus des différents traitements a été effectuée. La figure suivante illustre les ellipses d'erreurs absolues pour chaque technique d'ajustement.

La figure (3) montre que :

- les ellipses d'erreurs absolues obtenues lors de l'ajustement

avec contraintes internes (3.a) ont des tailles plus petites (≈ 12 cm) que celles déterminées par la méthode d'ajustement avec contraintes classiques (≈ 16 cm et ≈ 23 cm), figures (3.b) et (3.c).

- les dimensions des ellipses d'erreurs absolues obtenues lors de l'ajustement avec contraintes classiques (3.b et 3.c) varient en fonction du choix de la configuration des stations de référence. En d'autres termes, la précision planimétrique du réseau obtenue est tributaire du choix de la configuration du Datum.

En revanche, la méthode d'ajustement avec contraintes internes n'attribue aucune préférence à l'une ou l'autre des stations de référence (Datum défini implicitement ou réseau libre) et conserve la qualité et l'homogénéité du réseau.

La figure (4) montre que, dans le cas des contraintes classiques, la précision planimétrique du réseau varie selon la configuration des points de référence, par contre, dans le cas des contraintes internes, cette précision est sensiblement meilleure et homogène sur l'ensemble du réseau.

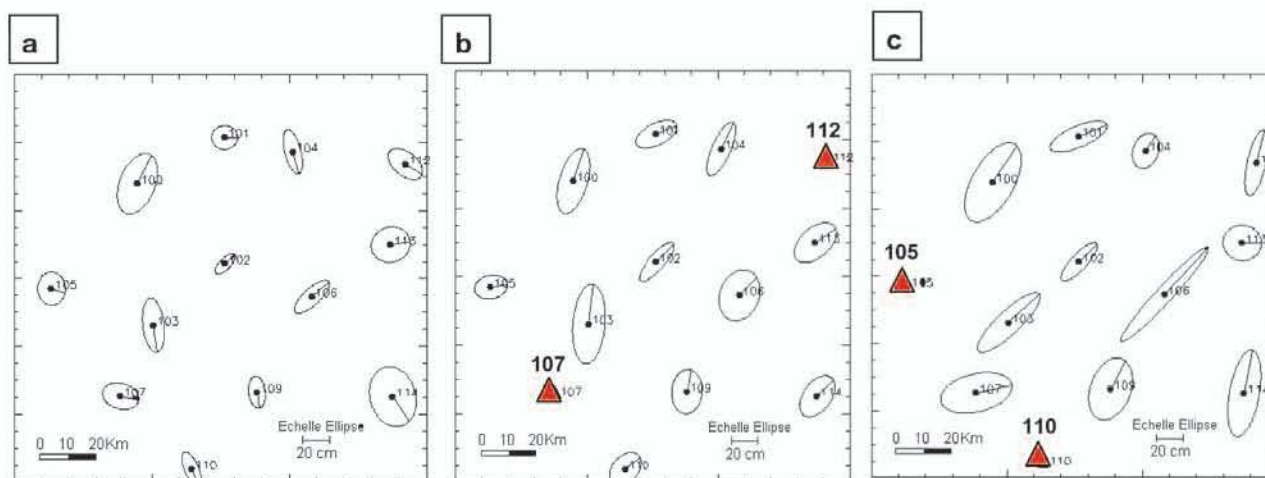


Figure. 3 Ellipses d'erreurs absolues : (a) contraintes internes, (b) contraintes classiques (points de référence : 107 et 112), (c) contraintes classiques (points de référence : 105, 110)

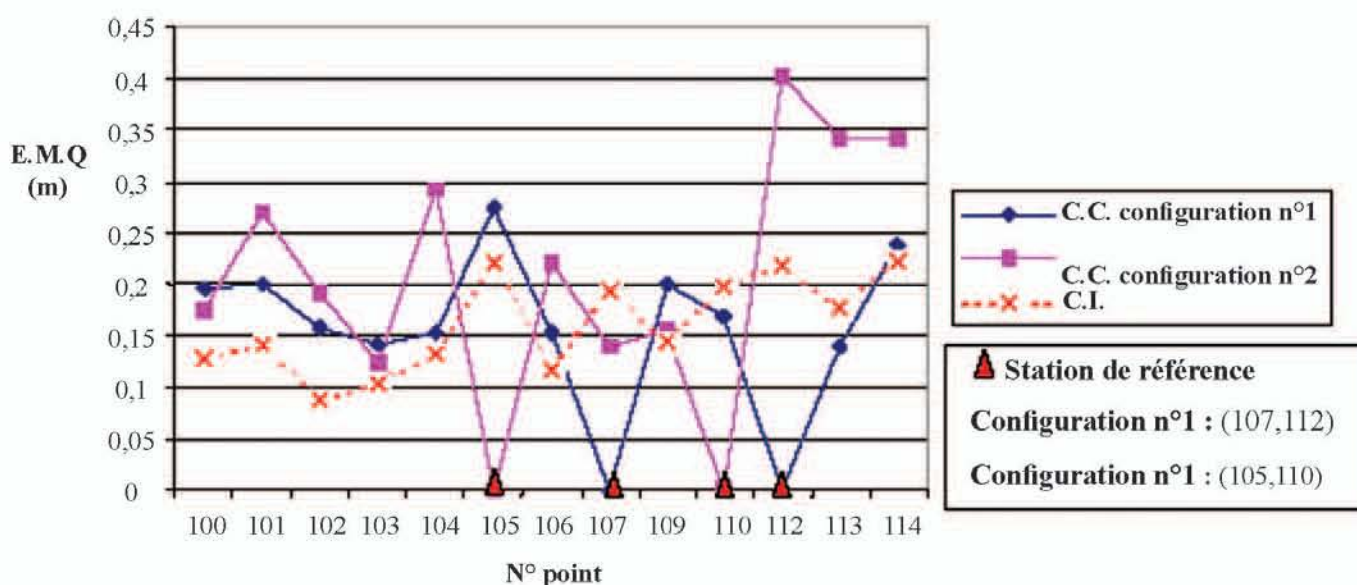


Figure. 4 Comparaison des précisions planimétriques du réseau issues des ajustement avec les contraintes internes (C.I) et avec les contraintes classiques (C.C).

Conclusion

L'ajustement avec contraintes internes d'un réseau géodésique permet d'éviter le problème de dépendance de la solution du réseau vis à vis du choix de la configuration et du nombre des stations de référence. Cette propriété est d'un grand intérêt pour le contrôle de la consistance et de la qualité des observations qui interviennent directement dans la détermination du réseau sans qu'il y est un rattachement au système de référence.

Dans le cadre de la refonte du réseau géodésique national (Nord Sahara), cette technique d'ajustement permettra d'assurer une précision homogène sur l'ensemble du canevas et d'évaluer sa valeur.

Remerciements:

Les auteurs tiennent à remercier l'Institut National de Cartographie et de Télédétection (INCT) pour avoir mis à leur disposition le jeu de données sur la zone test.

Références bibliographiques :

[1] **Altamimi Z., 2003** : Systèmes de référence terrestres: définition et réalisation. Ecole d'été de GRGS, Forcalquier, France, 28 Août 2003.

[2] **Barriot J.P., Sarrailh M., 2003** : Ajustement des réseaux gravimétriques. 3^{ème} atelier Nord Africain sur l'unification du système de référence géodésique, Rabat, Maroc, 16-17 Octobre 2003.

[3] **Corsilla F., 1984**: Tecniche di ottimizzazione delle reti geodetiche. Bollettino della società italiana di topografia e fotogrammetria, N°2 - 1984.

[4] **Gourine B., 2004** : Ajustement avec contraintes du réseau géodésique national. Application : réseau de base. Mémoire de Magister, CNTS - Arzew, septembre 2004.

[5] **He X., Wang G., Lu S., Wang X., 1999** : Plane deformation monitoring network and computational method of the NSRL storage ring. 6th International Workshop on Accelerator Alignment (IWAA), ESRF, Grenoble, France, 18-22 Octobre 1999.

[6] **Hwang W., Wang C.G., Lee L.H., 2002** : Adjustment of relative gravity measurements using weighted and datum-free constraints. Computers & Geosciences, vol. 28, pp.1005-1015.

[7] **Seemkooei A.A., 2001**: Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks. Springer Verlag, volume 75, numéro 4, Juillet 2001.

[8] **Sillard P., 1999** : Modélisation des systèmes de référence terrestres - contribution théorique et méthodologique. Thèse de Doctorat, Observatoire de Paris, mai 1999.

[9] **Vanicek P., Krakiwsky E.J., 1995** : Geodesy: The concepts. Edition Elsevier Science B. V., second edition, 697p,1995. ISBN 0-444-87777-0.