LES POIDS DES OBSERVATIONS HETEROGENES DANS LA COMPENSATION PAR LES MOINDRES CARRES

Par Claude Million
Claude.Million@wanadoo.fr
Site perso.wanadoo.fr /Claude. Million

INTRODUCTION :

On a voulu rassembler quelques recettes relatives à la pondération des mesures hétérogènes dans les compensations par les moindres carrés. Ce problème se pose constamment de nos jours où nous avons le bonheur de pouvoir utiliser toutes sortes de mesures: Par exemple les mesures de longueur électroniques rivalisent de précision avec les anciennes mesures angulaires. Dans une étude que nous avons eu l'honneur de mener sur l'utilisation de mesures faites à bord de l'avion au cours d'un vol de prise de vues aériennes, on a dû mélanger des mesures faites au sol, aux mesures traditionnelles faites sur les clichés, avec des mesures G P S faites à bord pendant le vol, des mesures de pression atmosphérique de très haute précision, et des mesures laser de distance entre l'avion et le sol, pour lesquelles nous n'avions qu'une très vague idée des précisions attendues, tant internes qu'externes.
Le problème avait été traité dans la thèse de Namik KOPLIKU, en utilisant l'étude théorique qui en avait été faite par l'I G G Ph. HOTTIER. Puis on a bénéficié d'une communication personnelle extrêmement riche et détaillée de l'I G G A.FONTAINE. En outre, on a pu constater que le problème, en principe résolu par HELMERT dès 1924, agitait dans le même temps, les chercheurs étrangers : Ce qui suit est une sorte de synthèse très simplifiée de ces travaux, et des essais, assez nombreux, qu'on a pu faire depuis.
Hélas, le problème n'est pas de ceux qu'on peut traiter aisément, au contraire, il demande une sérieuse préparation pour une mise en oeuvre pratique souvent extrêmement simple, mais qui doit être menée avec grand soin, sous peine de faire n'importe quoi.

INTRODUCTION:

One wanted to reassemble some recipes relative to the heterogeneous measures balancing in compensations by the least squares. This problem arises constantly nowadays where we have the good fortune to be able to use all ways of measures: For example the electronic length measures compete in precision with the ancient angular measures. In a survey that we had the honor to lead on the utilization of measures made aboard the plane during a flight of aerial photographies, we should have mixed measures made to soil, to the traditional measures made on shots, with G P S measures made aboard during the flight, measures of atmospheric pressure of very high precision, and laser measures of distance between the plane and soil, for which we only had a very wave idea of precisions waited, so much internal as well as external.
The problem had been treated in the thesis of Namik KOPLIKU, by using the theoretical survey that had been made by the I G G Ph. HOTTIER. Then we had got an extremely rich and detailed personal communication of the I G G A.FONTAINE. besides, we could have noted that the problem, in principle solved by HELMERT since 1924, agitated in the same time, the foreign researchers,: What follows is a way of synthesis very simplified of these works, and of tests, numerous enough, that we could have made since.
Alas, the problem is not of those that one can treat comfortably, on the contrary, it asks for a serious preparation for a practical implementation usually extremely simple, but that must be led with big care, for fear to have no idea what we are doing.

LES BASES THEORIQUES

Dans les compensations par les moindres carrés on cherche à résoudre un système d'équations non linéaire F(X,L)=0, pour lequel on connaît une valeur approchée X_0 des inconnues, on calcule l=F(X_0,L), on cherche les corrections à apporter à X_0 pour en obtenir les estimations les plus probables.
L'équation à résoudre est, alors, de la forme:

$$A.\dot{x} = l - \dot{e}$$

Dans laquelle:
A, m lignes et n colonnes est la matrice Jacobienne de linéarisation des équations d'observation. Ses lignes sont la suite des dérivées partielles de la fonction liant les inconnues à la mesure l.

$$\frac{\partial F}{\partial X} = A$$

x, n ligne et 1 colonne est le vecteur des inconnues au voisinage d'un point approché X_0 . On a x= X-X_0, X est la solution cherchée (Le point indique des valeurs "vraies").
l, m lignes, 1 colonne, est la différence entre la mesure et cette même quantité calculée au voisinage du point approché L-F(X_0)=l, l= Observé - Calculé.
e, m lignes et 1 colonne est le vecteur erreur.
L'hypothèse classique est que l'espérance du vecteur e, en d'autres termes sa moyenne, est nulle E(e)=0, où :

$$E(e) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} e_i}{n}$$

On utilise l'opérateur espérance E() pour alléger l'écriture.
La variance de e, e.e^T est

$$\sigma^2 = P^{-1}.\sigma_0$$

cette matrice de dimensions m,m sera le plus souvent diagonale, sauf si les données proviennent d'une compensation précédente isolée, dont on a pu relever la matrice normale.
La compensation par les moindres carrés résulte de la pré multiplication par la matrice A^T,n lignes et m colonnes, et dans la pondération des observations. Les équations, après pondération, s'expriment par des valeurs **sans dimensions.**
On écrit :

$$\sqrt{P}.A.x = \sqrt{P}.l$$

$$A^T.P.A.x = A^T.P.l$$

$$N = A^T.P.A$$

$$N.x = A^T.P.l$$

En prémultipliant les deux membres par N^{-1} ,n lignes,n colonnes, on obtient :

$$\overline{x} = N^{-1}.A^T.P.l$$

$$A^- = N^{-1}.A^T.P$$

$$\overline{x} = A^-.l$$

ou x barre est l'estimation des moindres carrés de x, A^- est l'inverse généralisée de A, la notation est due à l'I G G Ph.HOTTIER, elle est différente des notations étrangères notamment anglo-saxonnes qui, à notre sens, peuvent induire en erreur.
On calcule le vecteur des résidus v, m lignes et 1 colonne :

$$v = A.\overline{x} - l \text{ , } l = A.\dot{x} + e$$

$$v = A.(\overline{x} - \dot{x}) - e; \text{ où } \overline{x} - \dot{x} = N^{-1}.A^T.P.e$$

$$\text{car } \overline{x} = N^{-1}A^T.P.l, \text{ et } \dot{x} = N^{-1}.A^T.P.(l-e)$$

$$v = A.N^{-1}.A^T.P.e - e; \quad v = -(I - A.A^-).e$$

$$v = -Q.e$$

$$Q = I - A.A^-$$

La matrice symétrique Q, m lignes, m colonnes, est de rang m-n, donc singulière. De plus elle est **idempotente** (Annexes), ce qui a pour conséquence que sa trace est égale à son rang m-n, donc la somme des variances des résidus pondérés est égale à m-n, comme par définition la somme des variances des mesures pondérées est égale à n, on voit qu'elle est toujours supérieure à la somme des résidus pondérés: **Résidus << Erreurs d'observation.**
De plus, on a Q²=Q (idempotence voir annexes), et chaque terme diagonal est inférieur ou égal à 1, il est égal, aussi, à la somme des carrés des termes de sa ligne, et on peut en connaître une valeur approchée sans grands calculs :

$$q_{ii} = q_{i1}^2 + q_{i2}^2 + \ldots + q_{ii}.q_{ii} + \ldots + q_{ij}^2 + \ldots\ldots + q_{im}^2$$

$$0 \leq q_{ii} \leq 1$$

$$E(q_{ii}) = \frac{m-n}{m} \ll 1$$

On vient de toucher du doigt la base de la pondération des mesures hétérogènes: Dans un système où toutes les observations sont homogènes (de même nature et de même précision), la somme des carrés des résidus pondérés est égale à son rang m-n, m nombre de mesures homogènes, n nombre d'inconnues à déterminer; de même on a :

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} = 1; \quad \sigma_1^2.p = 1 \quad ,$$

rappelons que σ_0 et $\sigma_1$sont respectivement l'écart-type a priori et l'écart-type a posteriori.
La somme des résidus pondérés est, alors, égale au nombre de ses degrés de liberté m-n . m nombre d'observations, n nombre d'inconnues.
Le problème qu'on veut résoudre est de donner, à des mesures hétérogènes, des poids **a priori,** tels que cette propriété soit conservée; on considère, peut être un peu légèrement, que si cette condition est respectée, on utilise, pour pondérer les mesures, les **vrais** écarts-type des populations de mesures concernées.
Ceci est d'autant plus contestable qu'un autre critère a été proposé : celui d'égaliser les **moyennes** des **traces** des sous-matrices des résidus pondérés des observations, dans la majorité des cas les résultats sont identiques.
Mais, il semble que le premier critère soit le plus souvent, et internationalement, retenu.
Si on partitionne la matrice de mesures hétérogènes Q en sous-matrices homogènes, de mesures de même nature et de même précision on aura :

$$\begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$Tr(Q_{ii}) = Tr(Q_{i1}.Q_{1i}) + Tr(Q_{i2}.Q_{2i}) + \ldots + Tr(Q_{ii}.Q_{ii}) \ldots Tr(Q_{ij}.Q_{ji}) + \ldots$$

Les matrices Q ont les mêmes propriétés que les termes q d'une ligne et notamment:
Cette relation, expliquée en annexe, est importante, car connaissant un élément diagonal on pourra approcher les termes hors diagonale.

LES EQUATIONS ET LEUR RESOLUTION

On se propose de représenter les populations des résidus de compensation par les moindres carrés par la relation

$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ v_m \end{matrix} = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_m \end{matrix} . N^{-1}.A^T.P.e - \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ . \\ e_m \end{matrix}$$

Avec $A = A_1 + A_2 + A_3 + . + A_m$ ce qui mène à:

$$v_1 = A_1.N^{-1}.A^T.P.e - e_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$v_m = A_m.N^{-1}.A^T.P.e - e_m$$

ou

$$v_i = A_i.A^- e - e_i$$

On se donne quelques notations supplémentaires :
On a noté m le nombre total des observations de toutes natures on notera m_i le nombre des observations de nature et de précision i. On note d_i le déficit de rang des observations i.
La matrice globale de Variance-Covariance des observations est donnée par :

$$E(e.e^T) = \sum_{i=1}^{m} \rho_{0\,i}^2 . P_i^{1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_{0\,i}^2}{\sigma_{0\,i}^2}$$

Ou ρ^2 est un facteur de variance à calculer
Après des calculs assez longs, développés en annexe, on arrive à la relation :

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pp} \end{matrix} . \begin{matrix} \rho_1^2 \\ \rho_2^2 \\ . \\ \rho_p^2 \end{matrix} = \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_p \end{matrix}$$

On cherche à calculer ρ_i^2 qui est l'inconnue.
Les autres termes représentent les valeurs suivantes, calculées, sauf pour c, par deux voies différentes :

$$c_i = v_i^T.P_i.v_i$$

$$b_{ii} = m_i - 2.Tr(N^{1}.N_i) + Tr(N^{-1}.N_i.N^{-1}.N_i)$$

$$b_{ii} = Tr(Q_{ii})$$

$$b_{ij} = Tr(N^{-1}.N_j.N^{-1}.N_i)$$

$$b_{ij} = Tr(Q_{ij}.Q_{ji}) = Tr(Q_{ij}.Q_{ij}^T)$$

Habituellement, on ne fait pas tous ces calculs qui ne sont là que pour suivre le fil d'un raisonnement peu habituel. Le réel problème est celui de l'estimation des déficits de rang d des différentes catégories de mesures (Voir annexes).

CALCULS PRATIQUES

Il s'agit d'utiliser, sans trop les modifier, les programmes de compensation existants. Rappelons qu'à aucun moment on ne calcule d'inverse, car le calcul de la matrice inverse multiplie le temps passé pour une résolution simple par n, le nombre d'inconnues. On préfère donc faire plusieurs résolutions simples. En outre, la résolution du système d'équations linéaires précédent ne peut être qu'itérative puisque c est fonction de P qui, lui-même, est fonction de $\tilde{n}^2$.

On se sert des spécificités des problèmes pratiques. Il existe toujours, en effet, une population de mesures plus nombreuse que les autres, pour une triangulation ce sont les visées, pour un bloc d'aérotriangulation ce sont les mesures sur les clichés etc..

On commence par faire une compensation **libre** en divisant les mesures en deux populations : La première comprenant la population la plus nombreuse dont le déficit de rang d est le plus faible, la deuxième population comprend alors m-m_1-d relations auxquelles on donne un poids, très faible, juste suffisant pour que la compensation de l'ensemble soit possible.

Après compensation on calcule l'écart type de la première population par :

$$\rho_1^2 = \frac{v_1^T \cdot P_1 \cdot v_1}{m_1 + d - n}$$

$$\sigma_1^2 = \rho_1^2 \cdot \sigma_0^2 = \frac{v_1^T \cdot v_1}{m_1 + d - n}$$

On effectue ensuite des compensations dans lesquelles les poids de la première et de la ième population ne sont pas affaiblis, on reste dans le cas de deux populations alors qu'on connaît, déjà le résultat de la première. On a si Tr est la trace de la matrice :

$$Tr\ Q_{1\,1} + Tr\ Q_{2\,2} + \ldots\ldots Tr\ Q_{p\,p} = m - n \text{ (degrés de liberté)}$$

$$Tr(v_1 . P_1 . v_1^T) = v_1^T . P_1 . v_1 = Tr(Q_{1\,1} . Q_{1\,1}) + \rho_i^2 . Tr(Q_{i\,1} . Q_{1\,i})$$

$$Tr(v_2 . P_2 . v_2^T) = v_2^T . P_2 . v_2 \approx 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Tr(v_i . P_i . v_i^T) = v_i^T . P_i . v_i = Tr(Q_{1\,i} . Q_{i\,1}) + \rho_i^2 . Tr(Q_{i\,i} . Q_{i\,i})$$

$$Tr(v . P . v^T) = v^T . P . v = Tr(Q_{1\,1}) + \rho_i^2 . Tr(Q_{i\,i})$$

La dernière relation est la somme des deux, non nulles, qui la précèdent.

Dans chaque nouvelle compensation on remplace m par m_1+m_i n par n-d_i, etc...On a en effet

$$Tr\ Q_{1\,1} + Tr\ Q_{i\,i} = m_1 + m_i + d - n$$

EXEMPLE

On va se donner un exemple compliqué, mais très simple de résolution, au demeurant un réseau d'aérotriangulation appuyé sur peu de points d'appui et sur G P S embarqué, auquel on a adjoint, en secours, les mesures, qu'on verra inutiles, d'un statoscope.

On donne une description sommaire du réseau à compenser, avec les écarts-types a priori, on notera que les seules inconnues sont les coordonnées et les attitudes des sommets perspectifs, car par un artifice, quasiment génial, on résout partiellement les inconnues des points photogrammétriques, en les éliminant ainsi du calcul. On a 80 clichés au 1/30.000ème

en quatre bandes:

Inconnues de sommet	80X6	480	
Mesures sur clichés	1200X2=2400		5 m
Appuis 3-D	5X3	15	0,20m
Appuis en Z		60	0,20m
Coord G P S	80X3	240	0,50m
Altitudes Stato		80	1,20m

Degrés de liberté des mesures cliché f_1=2400+7-480=1927, la compensation libre donne une somme des carrés des résidus

clichés=94.723, et les résidus pondérés 94.723/ 5²=3.777, d'où

$$\rho_1^2 = \frac{3777}{1927} = 1,96 \text{ et } \rho_1 = 1,40 \text{ et } \sigma_1 = 1,40.5 = 7\mu m$$

Dans ce calcul le nombre 7 est le déficit de rang d qui se connaît par de simples considérations géométriques. On reprend la compensation en ajoutant les points d'appui aux mesures- clichés. Degrés de liberté des points d'appui f_2=15+60-7=68. La compensation donne une somme des carrés des résidus de 9,0; donc une somme des carrés des résidus pondérés de c_2=9/0,20²=225, dans le même temps, la compensation des mesures clichés donne une somme des carrés des résidus de 100.210, par conséquent des résidus pondérés de c_1=100.210/7²=2.045.

On a alors :

$$b_{1\,2} = \frac{225}{2} \pm \frac{\sqrt{225^2 - 4.68.(2045-1927)}}{2} = 44$$

Puis :

$$\rho_2^2 = \frac{1927.225 - 44.2025}{1927.68 - 44^2} = 0,66;\ \rho_2 = 0,81;\ \sigma_2 = 0,81X0,20 = 0,16m$$

Contrairement à ce qu'on a indiqué plus haut on regroupe les deux premières populations en une seule, les degrés de liberté de cette nouvelle population seront: f_1=2400+15+60-480-3=1992, pour G P S les degrés de liberté seront tout simplement de f_3=240+3=243.
On va donner, en rafale, les sommes de carrés des résidus pondérés, le calcul de b_{13} et le calcul de l'écart-type a posteriori:
88328/7²=1803
5,14/0,16²= 201 c_1=2004;c_3=74/0,50²=296

$$b_{13}=\frac{296}{2}\pm\frac{\sqrt{296^2-4.243.(2004-1992)}}{2}=11$$

Par conséquent

$$\rho_3^2=\frac{1992.296-11.1904}{1992.243-11^2}=0,48;\ \rho_3=0,69;\ \sigma_3=0,69X0,50=0,35m.$$

On recommence, en abrégeant, pour les mesures-statoscope:
96.625/7² =1972
2,69/0,16²= 105
17,6/0,36²= 144 c_1=2221;f_1=1992+243-1=2234;
c_4=157/1,20²=109;f_4=80+1=81

$$b_{14}=\frac{109}{2}-\frac{\sqrt{109^2-4.81.(2189-2234)}}{2}-40$$

par conséquent

$$\rho_4^2=\frac{2234.109-40.2221}{2234.81-40^2}=0,88;\ \rho_4=0,94;\ \sigma_4=0,94X1,20=1,13m$$

CONCLUSIONS

On aura remarqué que si la théorie est assez difficile à saisir d'emblée, l'application est très simple dans le cas présenté, qui, de lui-même, ne semblait pas simple a priori. Les difficultés naissent lorsqu'on a du mal a estimer les degrés de liberté d'une population, et/ou les déficits de rang, et si une population de mesures n'est pas nettement plus importante que les autres, notamment en triangulation 3-D de microgéodésie (nombre des angles verticaux égal à celui des angles horizontaux) : Il faut bien se rendre compte que poser $v^T.P.v = 0$ ne suffit pas si le nombre des mesures est grand, même si P est très petit. Enfin, **une erreur d'estimation sur un écart-type a posteriori se répercute sur tous les suivants**.
Toutefois, dans la majorité des cas, il est inutile de recourir à une simulation pour déterminer les matrices Q, comme on l'avait prétendu en 1989-1990.

ANNEXES

1- Les deux méthodes proposées

On avait abandonné le lecteur en raison de la longueur de développements littéraux qui devenaient nécessaires. On avait attaqué le problème sur deux fronts, l'un en étudiant et en exploitant les propriétés des matrices idempotentes, l'autre en développant le calcul de telle sorte qu'il nous mène à la possibilité de résoudre directement le système d'équations linéaires à partir de la matrice normale inverse. En effet, il se trouve que, de plus en plus fréquemment, on calcule la matrice inverse pour satisfaire la demande des clients de produire et d'afficher les ellipses d'erreurs. Dans la mesure où les programmes de compensation se plieraient à cette exigence, il serait possible de profiter du calcul de la matrice inverse pour automatiser la pondération rationnelle des mesures hétérogènes; c'est dans ce sens qu'on a fait le développement qui suit; plus loin on reviendra à la méthode adoptée dans l'article, qui consiste à ne prendre en compte, en une seule fois, que de deux populations de mesures actives, le reste étant inactivé par sous-pondération.

2-Développement menant au calcul direct.
Reprenons les données de base :

$$\begin{matrix} v_1 & & A_1 & & & e_1 \\ v_2 & & A_2 & & & e_2 \\ v_3 & = & A_3 & . \; N^{-1}.A^T.P.e & - & e_3 \\ . & & . & & & . \\ v_m & & A_m & & & e_m \end{matrix}$$

Si on développe la ième ligne des relations précédentes on a:

$$v_i^T.P_i.v_i=(A_i.N^{-1}.A^T.P.e-e_i)^T.P_i.(A_i.N^{-1}.A^T.P.e-e_i)$$

$$=e_i^T.P_i.e_i-e_i^T.P_i.A_i.N^{-1}A^T.P.e-e^T.P.A.N^{-1}A_i^T.P_i.e_i$$

$$+e^T.P.A.N^{-1}.A_i^T.P_i.A_i.N^{-1}.A^T.P.e$$

Avec:

$$v_1=A_1.N^{-1}.A^T.P.e-e_1$$
$$.................$$
$$v_m=A_m.N^{-1}.A^T.P.e-e_m$$

$$ou$$

$$v_i=A_i.A^- e-e_i$$

Avec $A=A_1+A_2+A_3+.+A_m$

ce qui mène à:

$$v_1=A_1.N^{-1}.A^T.P.e-e_1$$
$$.................$$
$$v_m=A_m.N^{-1}.A^T.P.e-e_m$$

$$ou$$

$$v_i=A_i.A\;\;e-e_i$$

Les deux termes du milieu du membre de droite de la relation précédente sont égaux par $u^T.v=v^T.u$. la relation devient:

$$v_i^T.P_i.v_i=e_i^T.P_i.e_i-2.e_i^T.P_{iA_i}.N^{-1}.A^T.P.e$$

$$+e^T.P.A.N^{-1}.A_i^T.P_i.A_i.N^{-1}.A^T.P.e$$

Si on prend la trace des deux membres, on note que:

$$v_i^T.P_i.v_i=Tr(v_i.P_i.v_i^T)$$

C'est la somme des carrés des résidus **pondérés**.
La trace complète des deux membres donnera:

$$v_i^T.P_i.v_i=Tr(e_i.e_i^T.P_i)-2.Tr(N^{-1}.A^T.P_i.e.e_i^T.P_i.A_i)$$

$$+Tr(N^{-1}.A^T.P.e.e_T.P.A.N^{-1}.N_i)$$

En développant comme indiqué ci-dessus :

$$v_i^T.P_i.v_i=Tr(e_i.e_i^T.P_i)-2.Tr(N^{-1}.(\sum_{j=1}^m A_j^T.P_j.e_j).e_i^T.P_i.A_i)$$

$$+Tr(N^{-1}.(\sum_{j=1}^m A_j^T.P_j.e_j).(\sum_{j=1}^m A_j.P_j.e_j)^T.N^{-1}.N_i)$$

On revient au texte de l'article :

$$E(e.e^T)=\sum_{i=1}^m \rho_{0\,i}^2.P_i^{-1}=\sum_{i=1}^m \frac{\rho_{0\,i}^2}{\sigma_{0\,i}^2}$$

Ou ñ^2 est un facteur de variance à calculer

Chaque terme de la somme ayant la forme suivante :

$$E(e_i . e_i^T) = \rho_{0\ i}^2 . P_i^{-1}$$

$$\text{Avec}$$

$$E(e_i . e_j^T) = 0 \ pour \ i \neq j$$

Car i et j ne sont pas corrélés.
On fait les substitutions nécessaires dans la relation précédente :

$$E(v_i . P_i . v_i^T) = Tr(\rho_{0\ i}^2 . P_i^{-1} . P_i)$$

$$-2 . Tr(N^{-1} . A_i^T . P_i . \rho_{0\ i}^2 . P_i^{-1} . P_i . A_i)$$

$$+Tr(N^{-1} . (\textstyle\sum_{j=1}^{m} . A_j^T . P_j . A_j . \rho_{0\ j}^2 . P_j^{-1} . P_j . A_j) . N^{-1} . N_i)$$

$$= Tr(I) . \rho_{0\ i}^2 + 2 . Tr(N^{-1} . N_i) . \rho_{0\ i}^2$$

$$+Tr(N^{-1} . (\textstyle\sum_{j=1}^{m} . A_j^T . P_j . A_j . \rho_{0\ j}^2) . N^{-1} . N_i)$$

$$= (m_i - 2 . Tr(N^{-1} . N_i) + Tr(N^{-1} . N_i . N^{-1} . N_i) . \rho_{0\ i}^2$$

$$+\textstyle\sum_{j=1 (j \neq i)}^{m} . Tr(N^{-1} . N_j . N^{-1} . N_i) . \rho_{0\ j}^2$$

On obtient les résultats donnés dans l'article :

$$\begin{array}{cccc} b_{1\ 1} & b_{1\ 2} & \ldots & b_{1\ p} \\ b_{2\ 1} & b_{2\ 2} & \ldots & b_{2\ p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{p\ 1} & b_{p\ 2} & \ldots & b_{p\ p} \end{array} . \begin{array}{c} \rho_1^2 \\ \rho_2^2 \\ . \\ \rho_p^2 \end{array} = \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_p \end{array}$$

On cherche à calculer ρ_i^2 qui est l'inconnue en notant que :

$$c_i = v_i^T . P_i . v_i$$

$$b_{i\ i} = m_i - 2 . Tr(N^{-1} . N_i) + Tr(N^{-1} . N_i . N^{-1} . N_i)$$

$$b_{i\ j} = Tr(N^{-1} . N_j . N^{-1} . N_i)$$

On remarquera que seule la matrice inverse de N intervient, qu'on n'utilise que les traces, donc on ne calculera, lorsqu'on peut le faire, que les termes diagonaux des produits de matrices.
On remarquera aussi que certaines des matrices N_i et N_j comportent beaucoup de termes nuls sur les inconnues où elles n'interviennent pas, d'autres, comme celles des points d'appui, sont des matrices identité, la relation d'observation étant x=l.
A=I.

3- Développement utilisant les propriétés de la matrice idempotente des résidus pondérés.

Le calcul des poids a priori est extrèmement facile pour autant qu'on connaisse exactement les degrés de liberté des différentes populations de mesures. C'est d'ailleurs la seule difficulté. Dans beaucoup de cas c'est évident, il n'y a donc pas de problème, dans d'autres c'est très difficile, dans la majorité des cas, le grand nombre des mesures et les faibles déficits de rang dont l'estimation et l'affectation peut poser problème sont négligeables. Il ne reste que les cas difficiles où le calcul des matrices Q devient indispensable.
On a noté que: $v = -Q . e$.

On calcule la somme des carrés des résidus pondérés:

$$v . \sqrt{P} = -Q . e . \sqrt{P}$$

$$\sqrt{P} . v^T = -\sqrt{P} . e^t . Q^T$$

$$v . P . v^T = Q . e . P . e^T . Q^T$$

$$mais \ e . P . e^T = P^{-1} . P = I \ (matrice \ identité)$$

$$v . P . v^T = Q . Q^T$$

$$Tr(v . P . v^T) = v^T . P . v = Tr(Q . Q^T) = Tr(Q) \ car$$

$$Q = I - A . (A^T . P . A)^{-1} . A^T \ et \ Q^T = A . N^{-1} . A^T - I$$

$$Q . Q^T = Q^2 = I . Q^T - (Q - I) + Q - I = Q^T \ mais \ Q^T = Q \ matrice \ symétrique$$

$$et \ (I - (A . N^{-1} . A^T)) . ((A . N^{-1} . A^T) - I) = Q^T$$

Si on calcule un terme de $Q.Q^T$ on multiplie une ligne de Q par une colonne de Q^T on trouve la relation

$$q_{i\ i} = q_{1\ i}^2 + q_{1\ i} . q_{i\ 1} + \ldots q_{i\ j} . q_{j\ i} + \ldots q_{m\ i} . q_{i\ m}$$

Qui se justifie par le schéma suivant de multiplication de la ligne i par la colonne i de la matrice transposée

$$\begin{array}{llllll} & & q_{i\ 1} & & & \\ & & q_{i\ 2} & & & \\ & & . & & & \\ & & . & & & \\ & & . & & . & \\ q_{i\ i} = q_{i\ 1} & q_{i\ 2} \ \ldots & q_{i\ i} & \ldots & q_{i\ j} & . \ . \ q_{i\ m} \\ & & . & & . & \\ & & . & & & \\ & & . & & & \\ & & . \ . \ q_{j\ i} \ . \ . & & & \\ & & . & & & \\ & & q_{m\ i} & & & \end{array}$$

Pour le calcul des traces des sous-matrices, on se ramène au calcul précédent en remarquant que la ligne de la sous-matrice qui est tronquée à droite à $q_{i\ j}$ se poursuit dans la ligne de la matrice de droite jusqu'à $q_{i\ m}$ qui multiplie la colonne de la sous matrice du dessous, de $q_{j\ i}$ à $q_{j\ m}$. On a donc, pour une partition en deux sous-matrices :

$$Tr(Q_{1\ 1}) = Tr(Q^2_{1\ 1}) + Tr(Q_{1\ 2} . Q_{2\ 1})$$

$$Tr(Q_{2\ 2}) = Tr(Q^2_{2\ 2}) + Tr(Q_{2\ 1} . Q_{1\ 2})$$

Étant connues l'idempotence et la symétrie de la matrice on a :

$$Tr(Q_{1\ 1}) + Tr(Q_{2\ 2}) = m_1 + m_2 - n = m - n$$

$$Tr(Q_{1\ 1}) = m_1 - n + d_1 \ \ si\ \ m_1 + d_1 > n\ \ et\ \ si\ \ m_2 > d_1$$

Où d_1 est le déficit de rang de A_1, généralement ceci correspond, pour une famille homogène à un phénomène géométrique simple: Pour les visées d'une triangulation c'est la nécessité d'avoir une base de longueur, une orientation du réseau, enfin, un point connu dans ses deux coordonnées planes, alors d_1=4. Si la triangulation est tridimensionelle d_1=5, il faut connaître, en plus, l'altitude d'un point; pour le bloc photogrammétrique d=7. Il faut, par conséquent, impérativement, que les mesures manquantes soient présentes dans les **mesures désactivées**, et écrire le nombre de mesures m_1+d_1, si ces mesures sont présentes dans la population mixte, formant A_1 déjà pondérée, d=0, il n'y a plus de déficit de rang, pour cette population. En revanche, si la seconde population est déficitaire par sa nature ou le modèle géométrique ou physique adopté pour écrire ses relations d'observations il faut lui ajouter un déficit de rang qui sera **retranché** la première population.
Dans l'exemple le déficit de rang de la première population est 7, par la suite, on associe la première et la seconde population, cette dernière n'a pas de déficit de rang, par contre la première lui soustrait 7 mesures pour combler son déficit de rang.
Le déficit de rang de G P S dépend de son modèle pour le relier au système général, dans l'exemple il est de 3; enfin, pour les mesures de pression, le modèle physique a un déficit de rang de 1.
Lorsqu'on traite deux population en laissant les poids de la première fixes, comme la trace de la matrice globale est constante et égale à m-n, la trace de la matrice des résidus pondérés de la seconde population diminue si on augmente le poids des observations si :

$$\sigma_1 < \sigma_0,\ alors\ \sigma_2 < \sigma_1$$

et ainsi de suite jusqu'à annulation des résidus; inversement si on diminue le poids des observations la trace de la matrice des résidus pondérés va augmenter, en outre, ces actions auront une action contraire.
On se trouve confrontés à une sorte de contradiction.

Examinons dans quelles conditions on peut effectuer des calculs simples, les relations linéaires sont très simples à résoudre pourvu qu'on dispose d'une estimation pas trop inexacte des coefficients b_{ij}, qu'on ne peut considérer comme nuls comme on l'a fait longtemps. Les quelques expériences qu'on a pu faire montrent que les valeurs suivantes peuvent être retenues, en notant f_j pour les degrés de liberté de la famille j :

$$b_{1\ 1} = f_1 = m_1 + d_1 - d_i - n;\ \ b_{i\ i} = f_i = m_i + d_i;\ \ b_{1\ j} \leq \sqrt{f_1 . f_i}$$

On écrit deux relations relatives aux deux familles de mesures la familles 1 la plus nombreuse et la famille 2 comprenant les autres.
On donne l'indice 1 au **groupe** de mesures dont les écarts-types a posteriori sont connus, le problème est d'estimer b_{1i} pour calculer $ñ_2^2$ connaissant $ñ_2^2$ =1 :

$$b_{1,1} . \rho_1^2 + b_{1,2} . \rho_2^2 = c'_1$$

$$b_{1,2} . \rho_1^2 + b_{2,2} . \rho_2^2 = c_2$$

Les deux inconnues sont $ñ_1^2$ et $ñ_2^2$, on a deux équations à deux inconnues.
Les solutions du système regroupant les populations deux par deux, la première d'écart type a posteriori connu, la seconde a déterminer sont :

$$\rho_1^2 = \frac{b_{2\ 2} . c_1 - b_{1\ 2} . c_2}{b_{1\ 1} . b_{2\ 2} - b^2_{1\ 2}} = \frac{f_2 . c_1 - b_{1\ 2} . c_2}{f_1 . f_2 - b^2_{1\ 2}} = 1$$

$$\rho_2^2 = \frac{b_{1\ 1} . c_2 - b_{1\ 2} . c_1}{b_{1\ 1} . b_{2\ 2} - b^2_{1\ 2}} = \frac{f_1 . c_2 - b_{1\ 2} . c_1}{f_1 . f_2 - b^2_{1\ 2}}$$

$$b^2_{1\ 2} - c_2 . b_{1\ 2} + f_2 . c_1 - f_1 . f_2 = 0$$

$$b_{1\ 2} = -\left(\frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4 . (f_2 . c_1 - f_1 . f_2)}}{2} \right.$$

C'est ce qu'on a fait dans l'exemple présenté.
Évidemment seule la racine positive est valable, mais aussi, il faut adopter le signe moins devant le radical, car b_{1j} <=f_j/2.
Le plus gênant est que la contrainte $ñ_i^2$ = 1 pèse lourdement sur la compensation ; le moindre incident dû, par exemple, à des mesures ou des données fausses, et tout est à refaire.
Le moindre écart, un peu important, entre les degrés de liberté et les résidus pondérés d'une famille, indique qu'on est mal équilibré pour cette famille. En cela le cas de la famille la plus nombreuse, famille 1, est prépondérant pour la suite des opérations, cela change quand on lui adjoint d'autres familles de mesures. En surveillant les résidus pondérés du groupe déjà équilibré on s'assure de la validité du résultat, il faut vérifier, entre autres, que le nouvel écart-type introduit ne perturbe pas les résultats déjà acquis.