LES CALCULS DE GEODESIE DU TOPOGRAPHE.

Par Claude Million

Claude.Million@wanadoo.fr
Site perso.wanadoo.fr/Claude.Million

Dans de précédents articles, notamment ceux de l'Ingénieur Général Géographe A.Fontaine, il a été indiqué pourquoi la manière de faire actuelle en matière de calcul des réseaux géodésiques était fautive, et les conséquences néfastes que cela pouvait avoir, principalement pour les topographes. Pour notre part, nous pensons que la manière à adopter, pour traiter les mesures, dépend, pour l'essentiel, de l'emploi qu'en feront les usagers. Par exemple, tout le monde est d'accord pour penser et dire que l'aérotriangulation des photogrammètres est du ressort exclusif du calcul tridimensionnel.

Notre attention a été attirée, essentiellement, par les conséquences des changements de définition du référentiel géodésique dans le mariage nécessaire entre les mesures G P S et celles, plus traditionnelles qui sont faites au sol, soit par les topographes, soit par les utilisateurs.

Pour faire simple, et pour ne pas revenir sur des discussions dont on est le suiveur et non l'initiateur [1] [2], disons que, pour l'essentiel, le système de référence géodésique ancien était **bidimensionnel** sur une surface **courbe**, le géoïde et l'ellipsoïde considérés comme confondus, alors que maintenant le référentiel géodésique est géocentrique **tridimensionnel cartésien**. La seule critique qui puisse être réellement faite aux responsables de ce changement serait de ne pas avoir assez insisté sur ce qui était une petite révolution, et de ne pas avoir mis ses conséquences, avantages et désavantages, suffisamment en relief.

Personnellement, on s'était d'abord rapproché des solutions préconisées par les Américains [3][4][5], qui sont fort simples et toutes de bon sens : Il s'agit tout simplement de faire les calculs de topographie dans le nouveau système géocentrique tridimensionnel cartésien et d'abandonner les calculs traditionnels. Mais on a trouvé à cela un inconvénient majeur, très ancien et très bien connu :

Il s'agit de mesurer des distances zénithales correctes sur des distances qui ont tendance à augmenter en raison de la portée considérable des distance mètres.

M.A Fontaine avait d'ailleurs largement insisté, dans ses articles, sur les raisons profondes qui avaient mené à l'adoption de l'ancien système géodésique : Essentiellement l'imprécision des mesures de distances zénithales sur de longues visées horizontales. Les propositions américaines citées plus haut [3] [4] [5] se heurtent, pour les mêmes raisons, aux même difficultés !

Dans ces circonstances que faire ?

Dans cette contribution on imagine revenir à l'ancien système, notamment dans le cas où on doit faire de très longues visées sub-horizontales dans des pays, ou des régions, où la réfraction dite normale n'existe que dans les livres, et où les visées réciproques ne sont pas réalisables.

Estimer correctement la réfraction pourrait faire l'objet d'une autre contribution.

Tout ce qui suit n'est pas original, mais le topographe le pratiquait assez peu. En tout état de cause, ce qui va suivre est du ressort de logiciels qui pourraient être employés, et qui seraient utilisés comme des “boites noires”, c'est pourquoi il n'est pas mauvais d'en rappeler les bases géométriques, même si cela est long et laborieux. Normalement, ces notions étaient du ressort de la géodésie, mais l'usage courant de G P S fait du topographe un géodésien qui s'ignore.

Le problème à résoudre est de mélanger des mesures G P S et des mesures terrestres traditionnelles sans utiliser le référentiel géocentrique cartésien tridimensionnel lorsqu'on ne peut pas calculer les mesures terrestres dans ce système, par exemple, faute de mesurer correctement les distances zénithales. Comme on ne peut pas, non plus, passer du système tridimensionnel dans lequel les résultats des mesures G P S sont exprimés, au système bidimensionnel sur une surface courbe dans lequel sont normalement exprimées les latitudes et les longitudes, parce que le vecteur joignant le point de la surface connu en coordonnées tridimensionnelles géocentriques à celles du point homologue de l'ellipsoïde exprimées les latitudes et longitudes, **est inconnu** (ou très mal ou très imparfaitement connu) il y a un problème.

En effet, la projection orthogonale du point de la surface sur l'ellipsoïde, telle qu'on la fait habituellement tant de fois par jour, n'est qu'une approximation grossière, qui pénalisera le topographe **qui retrouvera cette approximation dans les fermetures des mesures terrestres,** même si ces dernières sont correctement faites et réduites à l'ellipsoïde !

LA TRANSFORMATION DES MESURES G P S

Selon les propositions de l'auteur déjà cité, corroborées par des exemples célèbres tels que le Tunnel sous la Manche, il convient de transformer le vecteur G P S obtenu dans les calculs à partir des mesures brutes en ses deux composantes sur la surface l'ellipsoïde : Son azimut, et sa longueur développée le long du ce même ellipsoïde.

Pour l'azimut, c'est le même angle dans les deux systèmes, il suffit par conséquent de le calculer à l'aide des coordonnées cartésiennes tridimensionnelles en passant par les cosinus directeurs du vecteur (les Américains disent de la "base", source de confusion).

Pour la longueur il convient d'appliquer, à la longueur brute calculée de la même manière (la norme du vecteur), les corrections de réduction qu'on appliquait jadis aux bases chaînées ou mesurées au distance mètre, en prenant la précaution de réduire le vecteur à l'ellipsoïde et non au géoïde parce que ces deux surfaces sont, parfois, très éloignées (en France 50m), ce qui revient à appliquer une correction d'échelle. Il est tout à fait inutile de développer ces deux points maintenant très bien connus de tous.

LES CALCULS SUR L'ELLIPSOIDE

A l'aide des vecteurs G P S réduits à l'ellipsoïde il faut ensuite calculer les coordonnées géographiques, latitude et longitude, du point sur cette surface, et utiliser de la même manière les mesures terrestres pour déterminer les autres points, et ainsi, mélanger les deux familles de mesures.

Ce sont ces calculs qui ne sont pas très familiers aux topographes, mais qui peuvent le devenir lorsqu'ils disposeront des logiciels convenables.

D'abord, premier problème, on ne sait pas calculer les coordonnées sur une surface comme l'ellipsoïde, en revanche on sait le faire sur une sphère.

Le processus général est le suivant :

1/ Transformation, respectant les azimuts, des coordonnées ellipsoïdales et des longueurs de l'ellipsoïde, en coordonnées sphériques sur une sphère auxiliaire dite sphère de Jacobi ou sphère paramétrique, et des longueurs homologues sur l'ellipsoïde, sur la même sphère.

2/ Calculs des coordonnées sphériques inconnues sur la sphère paramétrique par la trigonométrie sphérique, sujet qu'on suppose bien connu.

3/ Transformation inverse de 1/ des coordonnées sphériques en coordonnées ellipsoïdales.

Comme noté on laissera de coté le point 2°qui est très bien connu : Signalons, toutefois, qu'on a montré, pour les curieux, que dans ce domaine il restait encore des sujets à explorer : Dans [6]et[7] on a, notamment, exposé le cas du relèvement et de l'intersection dans le repère géocentrique tridimensionnel cartésien, puis sur la sphère moyenne ou paramétrique. On ne va donc traiter que les points 1° et 3) c'est-à-dire les transformations des coordonnées ellipsoïdales en coordonnées sphériques et l'opération inverse, mais avec une difficulté supplémentaire, qui n'existait pas pour des déterminations où seuls interviennent des angles : l'introduction de longueurs mesurées réduites à l'ellipsoïde.

LES CORRESPONDANCES ENTRE LA SPHERE PARAMETRIQUE ET L'ELLIPSOIDE

On se reportera à la figure ci-contre qui dans sa partie supérieure est une section droite de l'ellipsoïde et dans sa partie inférieure une projection sur le plan équatorial. En partie haute on a représenté en coupe trois points P Q et R sur l'ellipsoïde de pôle N qui est lui-même enveloppé par la sphère de Jacobi de pôle N', les points sont projetés en P' Q' et R' sur la sphère paramétrique de telle sorte que la distance des points à l'axe polaire C N N' soit la même r = r'.

Ces derniers points sont la représentation paramétrique de leurs homologues P Q R, en ce sens que les azimuts d'une direction P Q R sur l'ellipsoïde sont égaux à ceux de la direction homologue P' Q' R' sur la sphère. On remarquera en outre que les latitudes φ_{P}, φ_{Q}, φ_{R} sur l'ellipsoïde ont pour homologues sur la sphère les latitudes paramétriques ψ_{-P}, ψ_{Q}, ψ_{R} ces dernières étant plus petites que les latitudes ellipsoïdales :

$\varphi \geq \psi$. Sur la moitié inférieure de la figure les points P' Q' et R' ,de la sphère paramétrique sont sur une ellipse projection d'un grand cercle. Il est également évident que arc(P' Q' R')> arc(P Q R) qui est en-dessous .

Le point P de l'ellipse a pour coordonnées $\begin{matrix} X_p = a.\cos(\psi) \\ Y_p = b.\sin(\psi) \end{matrix}$ a et b étant, respectivement, le grand et le petit axe de l'**ellipse méridienne** d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$

La normale en ce point P a pour pente $-\frac{\Delta X}{\Delta Y}$ = tangente de la latitude.

Donc $tg(\varphi) = -\frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{a.\sin(\psi)}{b.\cos(\psi)} = \frac{a}{b}.tg(\psi)$ (1) *mais* $a > b$ par conséquent $\varphi > \psi$. Ecrivons cette relation sous la forme $\frac{\sin(\psi)}{b.\sin(\varphi)} = \frac{\cos(\psi)}{a.\cos(\varphi)}$ qu'on élève au carré, tous calculs faits en posant : $W^2 = 1 - e^2.\sin^2(\varphi)$ *avec* $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ (2)

on aura alors
$$\begin{matrix} \cos(\psi) = \frac{\cos(\varphi)}{W} \\ \sin(\psi) = \frac{b.\sin(\varphi)}{a.W} \end{matrix} \quad (3)$$

On remarquera que, sur l'équateur, l'azimut de la géodésique est $Az_E = Az'_E$ sur chacune des surfaces puisque les deux surfaces sont tangentes en ce point, on a:

$$r.\sin(Az) = a.\sin(Az_E)$$
$$r'.\sin(Az') = a.\sin(Az_E)$$
$$donc \quad Az = Az'$$

a étant le demi- grand axe de l'ellipsoide et le rayon de la sphère paramétrique .

Les relations entre les latitudes sont également très simples:

$$X_p = N.\cos(\varphi), \quad d'où\ N = \frac{a}{W}$$
$$r = N.\cos(\varphi)$$
$$r' = a.\cos(\psi)$$
$$r = r'$$
$$\frac{N}{a} = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)} = \frac{1}{W}$$

N est la grande normale variable en fonction de φ notée sur la figure.

Après avoir calculé la grande normale N on va rechercher les relations donnant le rayon de courbure méridien ρ , en notant que pour notre propos ces calculs ne sont pas **nécessaires** .

Si ds est un petit élément d'arc sur l'ellipse méridienne le rayon de courbure sera

$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$. On a , d'après l'équation de l'ellipse méridienne:

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 = (a^2 .sin^2(\psi) + b^2.\cos^2(\psi)).d\psi^2 .$$

En différentiant (1) on a $\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{b}{a}.\frac{\cos^2(\psi)}{\cos^2(\varphi)} = \frac{b}{a}.W^{-2}$ en tenant compte des relations (3) : $\frac{ds^2}{d\varphi^2} = \frac{b^4}{a^2}.W^{-6}$ $d'où\ \rho = \frac{b^2}{a}.W^{-3}$. On a aussi $\frac{N}{\rho} = \frac{W^2}{1-e^2}$

Il est moins évident, sur la figure, que les différences des longitudes paramétriques $\Delta\lambda'$ soient plus petites que les différences de latitudes ellipsoïdales $\Delta\lambda$ qui leur sont homologues. Il n'est pas non plus évident que les azimuts dans les deux cas soient égaux . On va d'abord s'appliquer le démontrer.

Sur la sphère paramétrique, et sur l'ellipsoïde on a :

$$tg(Az) = \frac{r.d\lambda'}{a.d\psi} = \frac{r.d\lambda}{\rho.d\varphi}$$ Par conséquent:

$$d\lambda = \frac{\rho.d\varphi}{a.d\psi}.d\lambda'$$ Mais, d'après (1), en dérivant :

$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{a}{b}.W^2$ $par\ ailleurs\ \rho = \frac{b^2}{a.W^3}$, si on note $V^2 = 1 - e^2.\cos^2(\psi)$ (4),

on aura :

$$d\lambda = \frac{a}{b.W}.d\lambda' \qquad d\lambda = \frac{d\lambda'}{V} \qquad d\lambda' = \sqrt{(1-e^2.\cos^2(\psi))}.d\lambda$$

$$d\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-e^2.\cos^2(\psi)}}.d\lambda' \qquad (5),$$

mais l'intégration devant se faire le long de l'arc, la variable devra être ω , **c'est là que se trouve la seule réelle difficulté** . Donc, sur la sphère paramétrique, et d'après la figure, la trigonométrie sphérique des triangles rectangles donne :

$$sin(\psi) = sin(\omega).\cos(Az_E), \quad sin(\omega) = \frac{sin(\psi)}{\cos(Az_E)}$$

$$\cos(\psi) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)}$$

$$d\lambda' = \frac{a^2.\sin(Az_E)}{a^2.\cos^2(\psi)}.d\omega \quad = \frac{\sin(Az_E)}{1-\sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)}.d\omega$$

Sur la sphère paramétrique la longueur d'un coté est notée $\Delta\omega$, ses bornes étant ω_1 *et* ω_2 , sa valeur homologue sur l'ellipsoïde est notée Δs , ses bornes s1 et s2 .

On cherche une relation entre s et ω . Sur la seconde figure on a encore :

$$\cos(Az) = \rho.\frac{d\varphi}{ds} = \frac{a.d\psi}{a.d\omega};\quad \frac{ds}{d\omega} = \rho.\frac{d\varphi}{d\psi}$$

$$ds = a.\frac{1-e^2}{W^3}.\frac{W^2}{\sqrt{1-e^2}},\quad ds = a.(\sqrt{1-e^2.\cos^2(\psi)})$$

$$ds = \frac{a.d\omega}{V},\quad \Delta s = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{a}{V}.d\omega$$

LES INTÉGRATIONS

Pendant longtemps les intégrations ont été menées de façons différentes, approchées ou précises, selon que les géodésiques étaient courtes ou longues. Depuis plus de vingt ans, grâce aux moyens informatiques, on applique, sans remord, les formules destinées aux grandes géodésiques, indifféremment aux petites et aux grandes. On réalise donc une intégration rigoureuse de ds ou de $d\lambda$. Le premier problème, déjà souligné, est d'exprimer V et W en fonction de ω *et non de* ψ . A l'aide de quelques calculs algébriques, et des résultats obtenus plus haut, on obtient.

$$V^2 = e^2(1-\sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)), \quad (4)$$

$$W^2 = \frac{1}{1+e'^2.\sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)} = \frac{1-e^2}{1-e^2+e^2.\sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)} \quad (5).$$

$$\text{avec}\quad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

$$\Delta s = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{a}{V}.d\omega = \frac{a}{e}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)}}.d\omega \quad (6)$$ c'est une

intégrale elliptique.

$$\varepsilon = \Delta\lambda' - \Delta\lambda = sin(Az_E).\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1-\frac{b}{a}.\sqrt{1+e'^2.\cos^2(Az_E).sin^2(\omega)}}{1-sin^2(\omega.)\cos^2(Az_E)}.d\omega$$ (7), qui une

autre intégrale elliptique.

Il existe deux méthodes d'intégration classiques connues:

1°/ En développant en séries les relations ci-dessus à l'aide de la formule du

binôme $(1+x)^m = 1+m.x+m.(m-1)\frac{x^2}{2!}.......$, avec

$x = -(sin^2(\omega).\cos^2(Az_E), et\ m = -1/2$ et intégrer les différents termes.

Les difficultés viennent de la nécessité d'intégrer des puissances des sinus, on les contourne en se servant des formules de Moivre qui transforment les puissances des sinus ou des cosinus en multiples des arcs, qu'on sait intégrer. Pour les facilités du calcul informatique on revient, ensuite, après intégration terme à terme, aux puissances d'un mêmes arc par les relations inverses. Le résultat est un développement en série, programmable une bonne fois pour toutes, ce qui permet d'oublier le long parcours auquel on s'est soumis pour comprendre ce qui se passe. Ceci a été fait en 5-II (annexes), à paraître dans X Y Z, on n'y reviendra pas.

2°/Par une intégration par partie menant à des relations de récurrence dites intégrales deWallis . Voir les détails des calculs littéraux en annexe. En définitive on trouve :

$$\varepsilon = (1-\frac{b}{a}.[Arc\,tg(sin(Az_E).tg(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2} - \frac{b}{a}.sin(Az_E).\sum_1^{\infty} b_i.(e'^2.\cos^2(Az_E))^i.J_{2.i}$$ (8)et

$$\Delta s = s_2 - s_1 = b.(W_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} b_i.(e'^2.\cos^2(Az_E))^i.W_{2.i}$$.(9)

Le détail des variables récurrentes étant donné ci-dessous:

TABLEAU DES VARIABLES

i ou 2 p	bi	Ji	Wi
0	0	$\frac{1}{sin(Az_E)}.[Arc\ \ tg(sin(Az_E).tg(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2}$	$\omega_2 - \omega_1$
1	1/2		

2	-1/8	$\frac{1}{\cos^2(Az_E)}(J_0 - W_0)$	$1/2.W_0 - 1/2.[sin(\omega).\cos(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2}$
3	1/16		
4	-5/128	$\frac{1}{\cos^2(Az_E)}(J_2 - W_2)$	$3/4.W_2 - 1/4.[sin^3(\omega).\cos(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2}$
5	7/256		
6	-21/1024	$\frac{1}{\cos^2(Az_E)}.(J_4 - W_4)$	$5/6.W_4 - 1/6.[sin^5(\omega).\cos(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2}$
7	231/14336		
8	-3003/229376	$\frac{1}{\cos^2(Az_E)}(J_6 - W_6)$	$7/8.W_6 - 1/8.[sin^7(\omega).\cos(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2}$
etc......			

Problème direct

On appelle problème direct la situation dans laquelle on connaît λ_1 *et* φ_1, les coordonnées géographiques d'un point 1 sur l'ellipsoïde, l'azimut 1-2 : Az_{1-2}, et la distance s 1-2 réduite à l'ellipsoïde, et qu'on cherche à calculer les coordonnées géographiques de 2 : $\lambda_2 et\ \varphi_2$ On calcule directement

ψ_1, *puis* $sin(Az_{E(1-2)})$, *puis* $\alpha^2 = e'^2.\cos^2(Az_{E(1-2)})$,enfin

$sin(\omega_1)$. Les relations sont rappelées :

On calcule séquentiellement :

$$\psi_1 = Arc\ tg(\frac{b}{a}.tg(\varphi)),\ r_1 = r'_1 = a.\cos(\psi_1),$$

$$sin(Az_{E1-2}) = \frac{r_1}{a}.sin(Az_{1-2}),\ sin(\omega_1) = \frac{sin(\psi_1)}{\cos(Az_{E1-2})}$$

On cherche la valeur de l'arc sur la sphère paramétrique $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{1}{a}.\int_{1-2} V.ds$ qu'on ne peut pas calculer sur l'ellipsoïde, en revanche, si on connaît les limites 1'-2' sur la sphère on peut calculer $\Delta s = a.\int_{1'-2'} \frac{1}{V}.d\omega =$. Mais on ne connaît pas une des deux limites et on procède par approximations successives. L'inconnue est donc une des limites d'intégration.

On calcule d'abord directement, c'est-à-dire sans approximations.:

$$sin(\omega_1) = \frac{sin(\psi)}{\cos(Az_{E1-2})}\ .$$

Puis les approximations, dont l'ordre est noté en indice entre parenthèses, portent sur $\Delta\omega$: $\Delta\omega_{(0)} = \Delta s / b$, d'où $\omega_{2(0)} = \omega_1 + \Delta\omega_{(0)}$,

$$\Delta\omega_{(1)} = \frac{\Delta s}{b} - b_1.(e'^2.\cos^2(Az_E).W_2, W_2 \textit{ calculé à l'aide de } \omega_2$$ etc...

On calcule ω_2 par approximations successives. $\omega_{2(0)} = \omega_1 + \dfrac{s_2 - s_1}{b} = \omega_1 + \dfrac{\Delta s}{b}$,

puis

$\omega_{2(1)} = \omega_{2(0)} - b_1.a^2.W_2$ dont toutes les relations, fonction de ω_1 *et* ω_2, sont connues, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme.

On peut faire, ensuite tous les calculs trigonométriques sur la sphère, on connaît ainsi ψ_2 *et* λ'_2 qui sont les coordonnées du point sur la sphère paramétrique. On revient, ensuite, à l'ellipsoïde. Mais, cette fois, les calculs sont directs, en ce sens qu'ils ne demandent pas d'approximations successives.

$$\varphi_2 = Arc\ tg(\frac{a}{b}.tg(\psi_2))$$

$$\varepsilon = (1 - \frac{b}{a}.[Arctg(sin(Az_E).tg(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2} - \frac{b}{a}.sin(Az_E).\sum_1^{\infty} b_i.(e'^2.\cos^2(Az_E))^i.J_{2.i}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda' - \varepsilon = (\lambda'_2 - \lambda'_1) - \varepsilon$$

Problème inverse

On connaît les coordonnées géographiques λ_1, φ_1 , λ_2, φ_2 de deux points 1 et 2 , on veut connaître l'azimut Az 1-2, la longueur du coté 1-2 le long de l'ellipsoïde soit s2 - s1 entre ces deux points.

.On calcule directement ψ_1 *et* ψ_2, on fait les approximations successives suivantes, toujours en indice et entre parenthèses:

$$\varepsilon_{(0)} = 0, (\lambda'_2 - \lambda'_1)_{(0)} = (\lambda_2 - \lambda_1) = \Delta\lambda'_{(0)},$$

$$\cot g(Az_{1-2(0)}) = tg(\psi_1).\cos(\psi_2) - sin(\psi_2).\cos(\Delta\lambda'_{(0)}),$$

$$sin(Az_{E\,1-2(0)}) = \cos(\psi_1).sin(Az_{1-2(0)})$$

on cherche $\omega_{1(0)}$ *et* $\omega_{2(0)}$, $sin(\omega_{j_{(0)}}) = \dfrac{sin(\psi_j)}{\cos(Az_{E\,1-2(0)})}$, pour j=1 puis pour 2.

$$\varepsilon_{(1)} = (1-\frac{b}{a}.[Arctg(sin(Az_E).tg(\omega)]_{\omega_1(0)}^{\omega_2(0)} - \frac{b}{a}.sin(Az_E).\sum_{1}^{\infty} b_i.(e'^2.\cos^2(Az_E))^i.J_{2i}$$

$$\Delta\lambda_{(1)} = \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda'_{(0)} - \varepsilon_{(1)} = (\lambda'_2 - \lambda'_1) - \varepsilon_{(1)}$$

puis on recommence depuis le début avec $\Delta\lambda'_{(1)}$: on trouve directement Az1-2. Mais on doit calculer s2-s1 sur l'ellipsoïde, on applique alors directement la formule:

$\Delta s = s_2 - s_1 = b.(W_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} b_i.(e'^2.\cos^2(Az_E))^i.W_{2i}$ puisqu'on connaît exactement les limites ω_1 *et* ω_2 par les itérations précédentes. La programmation suit strictement les instructions décrites en détail, les itérations étant logées dans une ou des boucles dont on sort lorsque la précision désirée est atteinte.

CONCLUSIONS

Il ressort nettement de ce qui précède que ces calculs sont, à l'évidence, très simples à programmer, même en langage assembleur, en conséquence, si la théorie est assez longue et laborieuse à établir, et demande une certaine habitude dans ces types de raisonnements, l'application pratique en est des plus simples. Il ne sera pas plus long de calculer une ligne trigonométrique que ε *ou* Δs .

Les calculs propres à G P S ont fait oublier que les calculs géodésiques classiques conserveront leur utilité tant que l'homme rampera sur le géoïde et tant que ses oeuvres dépendront de la pesanteur, c'est-à-dire encore pour un certain temps. Il est bien évident que si les géodésiens ne veulent plus les faire il faudra bien que les topographes s'y mettent.

En aucun cas il ne faut perdre de vue que ce qui précède était tout à fait classique dans l'ancienne géodésie, mais reste tout nouveau pour les topographes.

ANNEXES

Le principe est le suivant :

$\varepsilon = [1-\frac{b}{a}.\sqrt{(1+(e'^2.\cos^2(Az_E).sin^2(\omega))}.\frac{sin(Az_E)}{1-sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)}.d\omega$, en développant le binôme sous le radical au numérateur en série on obtient:

$$\varepsilon = \Delta\lambda' - \Delta\lambda = sin(Az_E\ ).\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1-\frac{b}{a}-\frac{b}{a}.\sum_{i=1}^{i=\infty} b_i.(e^2.\cos^2(Az_E))^i.sin^{2.i}(\omega)}{1-sin^2(\omega.)\cos^2(Az_E)}.d\omega\ .$$

On pose:

$$J_{2.p} = \int_{\omega_2}^{\omega_2} \frac{sin^{2.p}\omega}{1 - sin^2\omega.\cos^2(Az_E)}.d\omega$$ *on fait l'artifice suivant:*

puis un autre

$$J_{2.p} = \int_{\omega_2}^{\omega_2} \frac{sin^{2.p}\omega \ (1 - sin^2\omega.\cos^2(Az_E) + sin^2\omega.\cos^2(Az_E))}{1 - sin^2\omega.\cos^2(Az_E)}.d\omega$$

artifice:

$$J_{2.p} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} sin^{2.p}.d\omega + \cos^2(Az_E).\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{sin^{2.p+2}\omega}{1 - sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)}.d\omega$$

Il reste à

$$J_{2.p} = W_{2.p} + \cos^2(Az_E).J_{2p+2} \qquad J_{2.p} = \frac{1}{\cos^2(Az_E)}.(J_{2p-2} - W_{2.p-2})$$

calculer Jo. On pose:

$$t = sin(Az_E).tg(\omega) \quad et\ dt = \frac{sin(Az_E)}{\cos^2\omega}$$

$$J_0 = \frac{1}{sin^2 Az_E}.\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{sin^2 Az_E}.[Arc\,tg(t)]_{t_1}^{t_2}$$,enfin

$$J_0 = \frac{1}{sin^2 Az_E}.[Arc\,tg(sin(Az_E).tg(\omega))]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

On a, en intégrant par parties :

$$W_{2.p} = \frac{1}{2.p}.\int_{\omega_1}^{\omega_2} sin^{2.p}(\omega).d\omega = \int u.dv, \quad u = sin^{2.p-1}(\omega), \quad dv = \frac{1}{2.p}.sin(\omega).d\omega\ ,$$

d'où :

$$W_{2.p} = \frac{1}{2.p}.u.v - \frac{1}{2.p}\int v.du = -\frac{1}{2.p}[sin^{2.p-1}(\omega).\cos(\omega)] + \frac{2.p-1}{2.p}\int sin^{2.p-2}(\omega).d\omega$$

$$W_0 = \omega_2 - \omega_1$$

$$W_{2.p} = \frac{2.p-1}{2.p}.W_{2.p-2} - \frac{1}{2.p}[sin^{2.p-1}(\omega).\cos(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

De même:

$s_2 - s_1 = \Delta s = b.\int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{1 + e'^2.\cos^2(Az_E).sin^2(\omega)}.d\omega$. La quantité sous le radical donne

, en la développant en série :

$$\sqrt{1 + e'^2.\cos^2(Az_E).sin^2(\omega)} = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} b_i.(e'^2.\cos^2 Az_E)^i.sin^{2.i}(\omega)$$

avec :

$$b_i = -b_{i-1}.\frac{2.i-3}{2.i}, \text{ on pose } J_{2p} = \int_{\omega 1}^{\omega_2} \frac{sin^{2p}(\omega).d\omega}{1-sin^2(\omega).\cos^2(Az_E)} = W_{2p} + \cos^2(Az_E).J_{2p+2}$$

Où les W_{2p} sont les intégrales de Wallis de rang pair, voir plus haut.

$$W_{2p} = \frac{2.p-1}{2.p}.W_{2.p-2} - \frac{1}{2.p}[sin^{2p-1}(\omega).\cos(\omega)]_{\omega_1}^{\omega_2} \ et$$

avec encore : $$J_{2i} = \frac{1}{\cos^2(Az_E)}(J_{2i-2} - W_{2i-2}) \quad avec:$$

$$J_0 = \frac{1}{sin(Az_E)}.[Arc\ tg(sin(Az_E).tg(\omega))]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

$$\varepsilon = (1-\frac{b}{a}).sin(Az_E).J_0 + \frac{b}{a}.sin(Az_E).\sum_{i=1}^{i=\infty} b_i.(e'^2.\cos^2(Az_E))^i.J_{2i}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = b.(W_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} b_i.(e'^2.\cos^2(Az_E))^i.W_{2i}$$

D'où le résultat annoncé dans le texte.

BIBLIOGRAPHIE

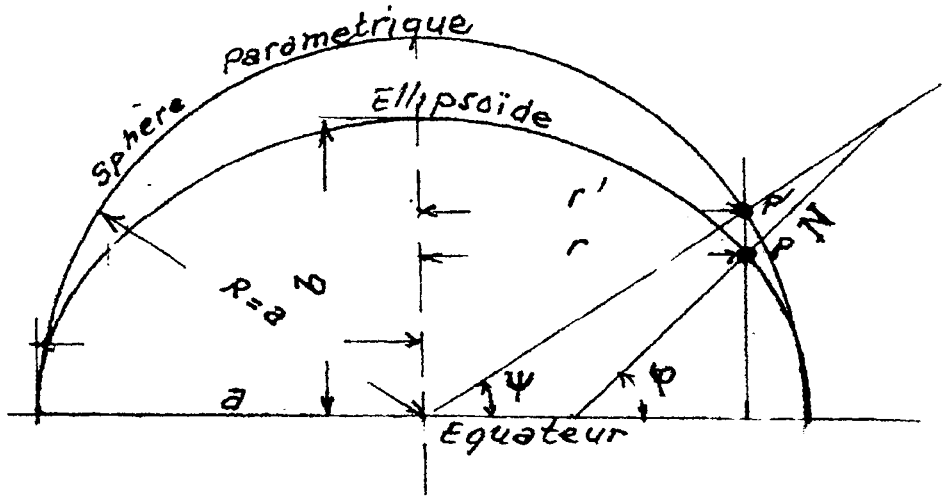
[1]C.Luzet - Evolution du Canevas Géodésique National, Etat d'avancement du réseau géodésique Français : X Y Z n°69 1996-4
Le Pape - Tribune des lecteurs: X Y Z n°71 1997-2 p 48

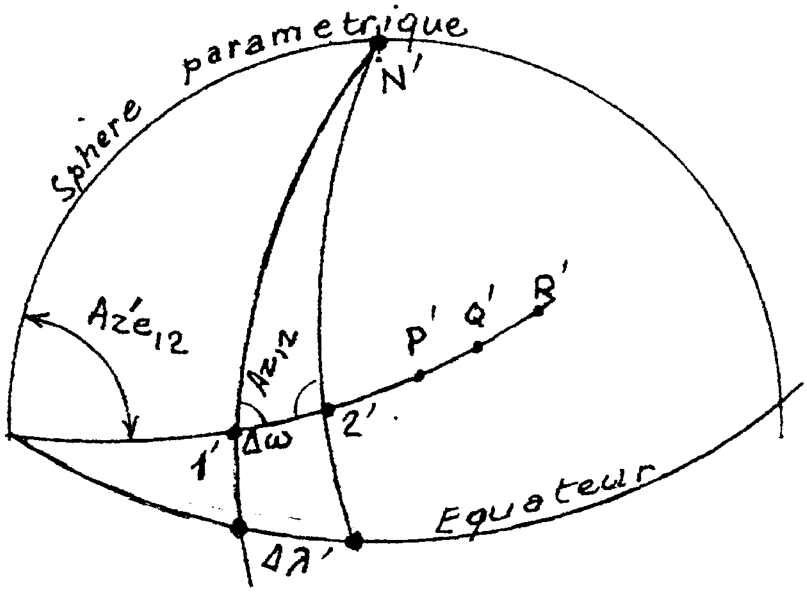
[2] A. Fontaine - Géométrie et Géodésie in X Y Z n°61 1994-4
- Incontournable Géodésie in X Y Z n°79 1999-2

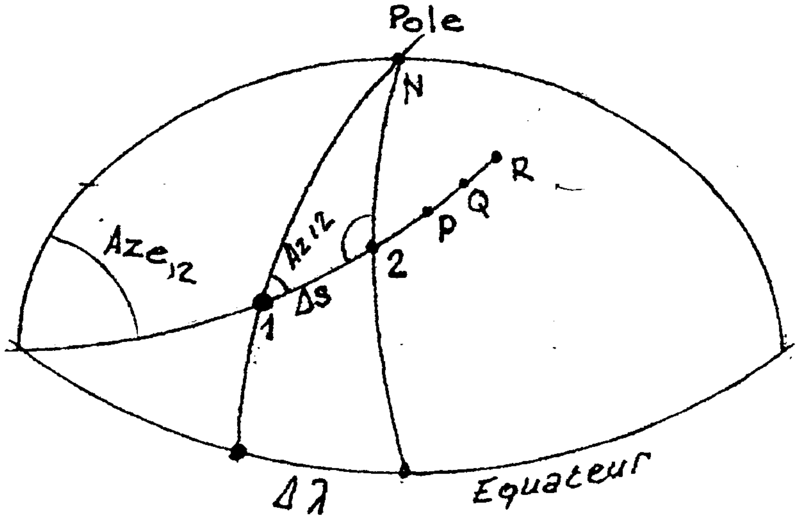
[3]E.F.Burkholder - Using G P S Results in True 3-D Coordinates System: Journal of Surveying Engineering Vol 119 N°1 Février 1993.

[4]A.Leick - Geometric Geodesy, 3-D Geodesy, Conformal Mapping: Rapport N°19 University of Maine Orono Maine 1990.

[5] C.Million-Tendances actuelles en matière de calcul des canevas de base in X Y Z n°78 1999-1
C.Million-Tendances actuelles en matière de calcul des canevas de base II in X Y Z n°79


Sphère parametrique
Ellipsoïde
r'
r
R=a
b
a
ψ
φ
N
Equateur


Sphère parametrique
N'
Az'e12
Az'12
P'
Q'
R'
2'
1'
Δω
Equateur
Δλ'


Pole
N
R
Q
P
Aze12
Az12
2
1
Δs
Equateur
Δλ