

Détermination du Geoïde Gravimétrique au nord de l'Algérie : Méthode de Stokes-Helmert

N. Zekkour & M. Aarizou

Centre des Techniques Spatiales. BP 13 Arzew-Oran

E-mail: zekkour.nesrine@gmail.com

ملخص: يصاغ مشكل القيم الحدية الجيوديزية في نظرية Stokes وفق شروط توافقية للكمون المضطرب و في غياب الكتل الطبوغرافية خارج المساحة الحدية للجيود، لكن في الواقع هذه الشروط غير محققة وعليه نقوم بصياغة مبسطة للفرضيات على كثافة الكتل الطبوغرافية وكذا تكامل Poisson لإيجاد الحل. الهدف من المقال هو استعمال طريقة Stokes-Helmert لصياغة مشكل القيم الحدية و للتعبير عن فرق الجاذبية في فضاء Helmert. وفي هذه الحالة نأخذ بعين الاعتبار التأثيرات الطبوغرافية المباشرة الجوية على كمون الجاذبية، تصحيحات اهليلجية وطريقة الاستمرارية نحو الأسفل لفروق الجاذبية. تركز الاختبارات التي أجريت على تحديد الجيود في شمال الجزائر من خلال طريقة Stokes - Helmert.

الكلمات الأساسية: التأثيرات الطبوغرافية، التأثيرات الجوية، الجيود، الكمون.

Résumé : Dans la théorie de Stokes, le problème de valeurs aux limites géodésiques de troisième espèce est formulé sous les conditions d'harmonicité du potentiel perturbateur et d'absence de masses topographiques à l'extérieur de la surface limite qui est le géoïde. Or, en pratique, ces conditions ne peuvent être satisfaites et, de ce fait, des hypothèses simplificatrices sur la densité des masses topographiques et sur l'analyticité de l'intégrale de Poisson sont émises pour obtenir une solution du problème. La reformulation du problème de valeurs aux limites dans l'espace de «Helmert» permet une meilleure modélisation de la topographie et mène ainsi à une estimation plus précise de la solution. Le thème développé à travers cet article porte sur la détermination du géoïde gravimétrique en adoptant l'approche de Stokes-Helmert pour résoudre le problème de valeurs aux limites et exprimer les anomalies de gravité dans l'espace d'Helmert. Dans la détermination de la solution, nous tiendrons compte des effets directs topographiques et atmosphériques sur le potentiel de pesanteur, des corrections ellipsoïdales et du prolongement descendant des anomalies de pesanteur. Les tests effectués ont porté sur la détermination du géoïde gravimétrique au nord de l'Algérie par la méthode de Stokes-Helmert. Les données utilisées sont constituées de 2064 points gravimétriques, du modèle géopotential EGM96, du modèle global d'élévation TUG87 et du modèle numérique de terrain GTOPO30. Les différents résultats obtenus sont illustrés.

Mots-clés: Anomalie de pesanteur, Effet atmo-

sphérique, Effet topographique, Géoïde, Co-géoïde, potentiel.

Abstract: One of the most advantageous methods is the approach of Stokes-Helmert developed at the University of New Brunswick (UNB) in Canada. In Stokes's theory, the geodetic boundary value problem (GBVP) of third kind is formulated under the conditions of harmonicity of the disturbing potential and absence of topographical masses outside the boundary surface which is the geoid. In practice, these conditions cannot be carried out exactly and, so of the simplifying assumptions on the density of topographical masses and the Poisson's integral are introduced for obtaining the solution of the problem. The reformulation of the GBVP in "Helmert's space" allows modeling better of topography and thus leads to a more precise estimate of the solution. The objective of this article consists in using the Stokes-Helmert scheme for the definition of the BVP and expressing the gravity anomaly in Helmert space. This will require holding account rigorously, in the determination of the solution, the direct topographic and atmospheric effect, the ellipsoidal corrections and the "downward continuation" of the gravity anomaly. The made tests concerned the determination of the geoid in the North of Algeria by the method of Stokes-Helmert. The used data are constituted by 2064 points, of the geopotential model EGM96, of the global model of rise TUG87 and the digital model of ground GTOPO30.

Key words: gravity Anomaly, atmospheric effect, topographic effect, Geoid, Potential, Co-Geoid.

1. Introduction

Le processus le plus adéquat à la définition de la forme réelle de la Terre se base sur le "troisième problème de valeurs aux limites géodésiques". Ce problème dans la théorie du potentiel gravitationnel consiste à déterminer une fonction harmonique (potentiel perturbateur) sur une superficie limite (le géoïde) par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire de cette fonction ainsi que de ses dérivées normales. La théorie de Stokes-Helmert présentée dans cet article étudie en détail la méthode de condensation de Helmert pour une détermination précise du géoïde.

Dans ce contexte, le 3^{ème} problème de valeurs aux limites géodésiques est ramené au 1^{er} problème de valeurs aux limites géodésiques qui est résolu dans l'espace de Helmert. La solution est obtenue alors sur le co-géoïde et sera de nouveau transformée dans l'espace réel (géoïde) par l'évaluation précise de l'effet topographique indirect primaire.

Le but principal de la méthode de Stokes-Helmert est de fournir une théorie assez précise pour le calcul du géoïde. Ce but sera atteint dans le cas où toutes les corrections et les transformations de l'anomalie de pesanteur observée dans l'espace de Helmert sont effectuées avec une précision de 10 μ Gal [14]. Cela implique a priori que tous les effets sur la pesanteur supérieurs à 10 μ Gal doivent être pris en compte.

2. Problème de valeurs aux limites géodésiques

Un problème de valeurs aux limites en géodésie physique peut être exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{à l'extérieur de } \Sigma \\ BT = f & \text{sur } \Sigma \\ T = O(r^{-2}) & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Où T est le potentiel perturbateur, B est un opérateur défini sur la surface limite Σ , et f est une fonction définie sur Σ résultant des mesures gravimétriques, des observations de nivellement, des systèmes de positionnement globaux (GPS), etc.

Selon les différences des données, on énonce le problème de valeurs aux limites géodésiques sous diverses formes:

- Problème de 1^{ère} espèce (Dirichlet):

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{à l'extérieur de } \Sigma \\ T = W - U & \text{sur } \Sigma \\ T = O(r^{-2}) & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Avec :

W : potentiel de pesanteur

U : potentiel normal.

- Problème de 2^{ème} espèce (Neumann):

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{à l'extérieur de } \Sigma \\ \frac{\partial T}{\partial h} = -\delta g & \text{sur } \Sigma \\ T = O(r^{-2}) & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Où $\frac{\partial T}{\partial h}$ et δg représentent respectivement la dérivée normale et la perturbation de pesanteur.

- Problème de 3^{ème} espèce (mixte) :

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{à l'extérieur de } \Sigma \\ \frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial h} T = -\Delta g & \text{sur } \Sigma \\ T = O(r^{-2}) & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Δg est l'anomalie de pesanteur.

Ce problème représente le problème fondamental de la géodésie physique dont la formulation est donnée, selon l'approche de Stokes par l'équation [3]:

$$\frac{\partial T(r_f)}{\partial h} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial h} T(r_f) + \Delta g(r_f) = 0 \quad (2.1)$$

Une approximation sphérique à cette équation est donnée par :

$$\frac{\partial T(r_f)}{\partial r} + \frac{2}{R} T(r_f) + \Delta g(r_f) = 0 \quad (2.2)$$

Où R est le rayon moyen de la Terre.

Rappelons que les mesures de pesanteur sont effectuées à la surface du sol ou à une certaine hauteur de celui-ci; Ce qui nous amène à utiliser une méthode de réduction pour le calcul de la pesanteur au géoïde. Cependant, le manque d'informations précises sur la densité de la masse topographique ne permet pas de calculer correctement la pesanteur au niveau du géoïde. Pour pallier à ces inconvénients, plusieurs approches ont été proposées dont la méthode de Helmert [4] que nous décrirons en détail dans ce qui suit.

3. Théorie de Stokes-Helmert

La deuxième méthode de condensation de Helmert est appliquée en même temps qu'à la théorie de Stokes comme étant la méthode la plus simple pour résoudre le problème de valeurs aux limites géodésiques. La combinaison de ces deux méthodes est dite Théorie de "STOKES-HELMERT" qui est basée d'une part, sur l'idée de condensation de Helmert pour la détermination précise du géoïde, et d'autre part, sur les propriétés théoriques de la solution de Stokes dans l'espace de Helmert.

Le potentiel perturbateur T^h dans l'espace de Helmert devient :

$$T^h(r) = T(r) - \delta V(r) \quad (3.1)$$

$$\text{et } \delta V(r) = \delta V'(r) + \delta V''(r) \quad (3.2)$$

- $\delta V'$ est le potentiel topographique résiduel, tel que : $\delta V'(r) = V'(r) - V'(r')$ (3.3)

Où V' et V ct représentent respectivement le potentiel des masses topographiques et le potentiel des masses topographiques condensées

- $\delta V''$ est le potentiel atmosphérique résiduel :

$$\delta V''(r) = V''(r) - V''(r') \quad (3.4)$$

Où V'' et V'' représentent respectivement le potentiel de la couche atmosphérique condensée et le potentiel des masses atmosphériques.

La fonction T^h est harmonique en tout point à l'extérieur du co-géoïde (le géoïde décalé) :

$$\Delta T^h(r) = 0 \quad r \geq r_g \quad (3.5)$$

r_g est le rayon géocentrique du co-géoïde.

Le co-géoïde de Helmert est décalé de quelques mètres du géoïde sous l'effet indirect de condensation de Helmert.

Ce dernier est connu sous le nom de l'effet topographique indirect primaire (PITE) [3].

La pesanteur de Helmert $g^h(r_t)$ à la surface de la Terre est la somme de la pesanteur observée $g(r_t)$ à la surface de la Terre, de l'effet topographique direct $\delta A'(r_t)$ et de l'effet atmosphérique direct $\delta A''(r_t)$ référé à la surface de la Terre, telle que :

$$g^h(r_t) = g(r_t) - \delta A'(r_t) - \delta A''(r_t) \quad (3.6)$$

La forme sphérique de la pesanteur observée peut être écrite en termes d'anomalies de pesanteur de Helmert de la manière suivante :

$$\Delta g^h(r_t) = \Delta g^{FA}(r_t) + \delta S'(r_t) + \delta S''(r_t) + \delta A'(r_t) + \delta A''(r_t) + \delta S^{\xi}(r_t) \quad (3.7)$$

- $\delta S'(r_t) = \frac{2}{R} \delta V'(r_t)$: Effet topographique secondaire indirect sur la pesanteur .

$$- \delta S''(r_t) = \frac{2}{R} \delta V''(r_t)$$

Effet atmosphérique secondaire indirect sur la pesanteur.

- $\delta S^{\xi}(r_t) = \frac{2}{R} H^o(r_t) \Delta g^{SB}(r_t)$ Correction du géoïde au quasi-géoïde.

- $\Delta g^{FA}(r_t)$: L'anomalie complète de Bouguer

3.1 Effets des masses topographiques sur la pesanteur

- Effet topographique direct

L'effet topographique direct des masses topographiques sur la pesanteur, créé en un point à la surface de la Terre, est donné par [8]:

$$A'(r_t) = \frac{\partial V'(r)}{\partial r} \Big|_{r=R+H^o(\Omega)} \quad (3.8)$$

$$= G \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \rho(\Omega') \int_{r'=R}^{R+H^o(\Omega')} \frac{\partial N(r, \psi, r')}{\partial r} \Big|_{r=R+H^o(\Omega)} r'^2 dr' d\Omega'$$

$\rho(r', \Omega)$ Densité des masses topographiques.

$N(r, \psi, r')$ Forme spatiale du noyau de Newton.

$H^o(\Omega')$ Altitude horthométrique.

L'effet topographique direct des masses topographiques condensées sur la pesanteur, compté également sur la surface de la Terre, est représenté par [8] :

$$A^{ct}(r_t) = \frac{\partial V^{ct}(r)}{\partial r} \Big|_{r=R+H^o(\Omega)} \quad (3.9)$$

$$= GR^2 \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \sigma(\Omega') \frac{\partial N(r, \psi, R)}{\partial r} \Big|_{r=R+H^o(\Omega)} d\Omega'$$

Où $\sigma(\Omega')$ représente la densité de la couche topographique condensée.

- Effet topographique secondaire indirect

L'application de la correction topographique à l'anomalie de pesanteur donne l'origine de l'effet topographique indirect secondaire. Il est donné par l'équation suivante [9] :

$$\delta V' = G \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \rho(\Omega') \int_{r'=R}^{R+H^o(\Omega')} N(r, \psi, r') \Big|_{r=R+H^o(\Omega)} r'^2 dr' d\Omega' - G \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \rho(\Omega') \frac{r^3(\Omega') - R^3}{3} N(r, \psi, R) d\Omega' \quad (3.10)$$

3.2 Effet des masses atmosphériques sur la pesanteur

- Effet atmosphérique direct

L'effet atmosphérique direct sur la pesanteur rapporté à la surface terrestre est [14] et [11]:

$$\frac{\partial \delta V^a(r)}{\partial r} \Big|_{r=R+H^o(\Omega)} = \frac{\partial V^a(r)}{\partial r} \Big|_{r=R+H^o(\Omega)} - \frac{\partial V^{ca}(r)}{\partial r} \Big|_{r=R+H^o(\Omega)} \quad (3.11)$$

- Effet atmosphérique secondaire indirect

L'effet atmosphérique secondaire indirect sur la pesanteur définie sur la surface de la Terre, peut être décrit par l'expression suivante [11] :

$$\frac{2}{r_t} \delta V^a(r) = \frac{2}{r_t} V^a(r) - \frac{2}{r_t} V^{ca}(r). \quad (3.12)$$

3.3 Prolongement descendant des anomalies de pesanteur de Helmert

Dans la formulation standard du problème de valeurs aux limites géodésiques de Stokes, la solution (potentiel perturbateur T) est déterminée au-dessus de la surface limite (géoïde) alors que les observations (valeurs de pesanteur g) sont mesurées à la surface de la Terre. Pour obtenir ces valeurs aux limites, les observations doivent être réduites de la surface terrestre au géoïde. Cette réduction est appelée le prolongement descendant d'anomalie de pesanteur.

L'outil mathématique standard utilisé pour l'étude des prolongements descendant et ascendant est basé sur le théorème de Poisson qui définit une fonction f , connue sur une sphère de rayon R et harmonique en dehors de cette sphère. Le calcul des valeurs de la fonction $f(r, \Omega)$ s'effectue sur n'importe quel point à l'extérieur de la sphère ($r > R$) par l'intégrale de Poisson selon [6] :

$$f(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} f(R, \Omega') K(r, \psi, R) d\Omega', \quad (3.13)$$

Où K est le Noyau de l'intégral de Poisson défini par [15] :

$$K(r, \psi, R) = \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1) \left[\frac{R}{r} \right]^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (3.14)$$

Puisque les masses topographiques et atmosphériques sont condensées sur le géoïde, l'espace de Helmert, au-dessus du géoïde (rapproché par la sphère géocentrique de rayon R ($r_g \approx R$)), est harmonique. L'anomalie de pesanteur de Helmert Δg^h multiplié par le rayon géocentrique de la surface terrestre r_i satisfait l'équation de Laplace au-dessus du géoïde, $r_i \phi R: \nabla^2 [\frac{r_i}{R} \Delta g^h(r_i)] = 0$ [16].

L'intégrale de Poisson pour Δg^h est donnée par la formule suivante [6] :

$$\Delta g^h(r_i) = \frac{R}{4\pi r_i} \iint_{\Omega \in \Omega_1} K(r_i, \psi, R) \Delta g^h(R) d\Omega, \quad (3.15)$$

Où $\Delta g^h(r_i)$ est le vecteur des anomalies de pesanteur de Helmert sur la surface de la Terre et $\Delta g^h(R)$ est le vecteur des anomalies de la pesanteur de Helmert sur le Co-géoïde (rapprochée encore par la sphère de référence de rayon R).

La forme discrète de l'équation de l'intégrale de Poisson dont la forme générale est l'équation de l'intégrale de Fredholm de première espèce, peut être exprimée comme suit [10] et [4] :

$$\Delta g^h(r_i) = K(r_i, \psi, R) \Delta g^h(R), \quad (3.16)$$

Selon l'itération approchée de Jacobi [12] pour la solution d'un système d'équations algébriques linéaires, on obtient le système d'équations algébriques suivant [10] :

$$\Delta g^h(R) = \Delta g^h(r_i) + B(r_i, \psi, R) \Delta g^h(R). \quad (3.17)$$

B est la matrice creuse déduite de la matrice K par suppression des termes de la diagonale.

Ce système d'équation (3.17) peut être résolu itérativement. On commence par le vecteur d'anomalies à l'air libre de pesanteur à la surface terrestre Δg^{FA} (car ces dernières sont semblables aux anomalies de pesanteur de Helmert sur le géoïde), tel que :

$$\Delta g^h(R) \Big|_0 = \Delta g^{FA}(r_i). \quad (3.18)$$

La $k^{ième}$ étape d'itération ($k > 0$) $\Delta g^h(R) \Big|_k$, est effectuée selon l'équation suivante [10] :

$$\Delta g^h(R) \Big|_k = B(r_i, \psi, R) \Delta g^h(R) \Big|_{k-1} + \Delta g^h(r_i) \quad (3.19)$$

Ainsi, lorsque la différence des résultats de deux itérations $|\Delta g^h(R) \Big|_k - \Delta g^h(R) \Big|_{k-1}|$ est inférieure à la tolérance ϵ , le processus itératif s'arrête. Le résultat de cette opération est la solution de l'équation (3.7), [10] :

$$\Delta g^h(R) = \Delta g^h(r_i) + \sum_{k=1}^{\bar{k}} \Delta g^h(R) \Big|_k, \quad (3.20)$$

Où \bar{k} est la valeur de la dernière itération.

Les différentes étapes de cette étude sont illustrées dans le schéma suivant :

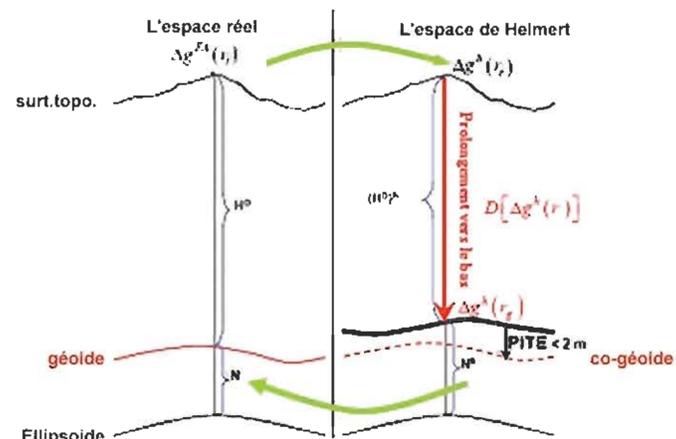


Fig. 1 Schéma des deux espaces (Réel, Helmert).

4. Problème de valeurs aux limites de Stokes

Le potentiel de pesanteur de référence $W_{ref}^h(r)$ dans l'espace de Helmert peut être exprimé par la formule suivante [15]:

$$r > R: W_{ref}^h(r) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_0}{r} \right)^{n-1} \sum_{m=-n}^n W_{n,m}^h Y_{n,m} \right] \quad (4.1)$$

Cette relation est valable au niveau du co-géoïde. Comme cette surface est inconnue, l'approximation appropriée du géoïde ($r_g \approx r_0$) peut être utilisée avec [15]:

$$r_g \approx r_0 \equiv a(1 - f \sin^2 \phi)$$

Le potentiel de pesanteur de référence de Helmert au niveau du co-géoïde devient :

$$r > R: W_{ref}^h(r_g) \approx \frac{GM}{r_0} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + (n+1)f \sin^2 \phi] \sum_{m=-n}^n W_{n,m}^h Y_{n,m} \right]$$

Tel que :

$$(4.2)$$

$$n = 1, 2, \dots, \bar{n}: \left[\frac{a_0}{r_g} \right]^{n+1} = 1 + (n+1)f \sin^2 \phi - \dots$$

Selon la condition aux limites [3], l'anomalie de pesanteur de référence de Helmert peut être exprimée comme suit :

$$\Delta g_{ref}^h(r_g) \approx \frac{\partial T_{ref}^h(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \frac{2}{R} T_{ref}^h(r_g) \quad (4.3)$$

Où $T_{ref}^h(r_g) \equiv T_{ref}^h(r_0) = W_{ref}^h(r_g) - U_0(\phi)$ décrit le potentiel perturbateur de référence de Helmert.

La surface limite équipotentielle dans l'espace de Helmert est donnée par l'ondulation co-géoïdale $N^h(\Omega)$. Cette surface peut être évaluée à partir des anomalies de pesanteur de Helmert $\Delta g^h(R)$ rapportée à la sphère de référence de rayon R par l'application des formules de Stokes et Bruns dans l'équation suivante [3] :

$$N^h(\Omega) = \frac{R}{4\pi \gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega} \Delta g^h(R) S(\psi) d\Omega' \quad (4.4)$$

4.1 Fonction sphéroïde modifiée de Stokes

Les valeurs de la fonction sphéroïde de Stokes $S_{n>n}(\psi)$ varient proportionnellement par rapport à la distance sphérique ψ . Le domaine d'intégration Ω_0 de l'intégrale de Stokes peut être décomposé en deux domaines. L'un concerne les zones proches Ω_{ψ_0} ($\psi \in [0, \psi_0]$) et l'autre les zones éloignées $\Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}}$ ($\psi \in [\psi_0, \pi]$), tel que [13] :

$$\iint_{\Omega \in \Omega_0} d\Omega = \iint_{\Omega \in \Omega_{\psi_0}} d\Omega + \iint_{\Omega \in \Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}}} d\Omega \quad (4.5)$$

Les contributions des zones proches et éloignées, à haute fréquence, aux altitudes co-géoïdales $N_{n>n}^h, \Omega_{\psi_0}$ et $N_{n>n}^h, \Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}}$ sont données respectivement, par :

$$N_{n>n}^h, \Omega_{\psi_0}(\Omega) = \frac{R}{4\pi \gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_{\psi_0}} \Delta g^h(R) S_{n>n}(\psi) d\Omega' \quad (4.6)$$

$$N_{n>n}^h, \Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}}(\Omega) = \frac{R}{4\pi \gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}}} \Delta g^h(R) S_{n>n}(\psi) d\Omega' \quad (4.7)$$

La fonction sphéroïde modifiée de Stokes $S_{n>n}(\psi_0, \psi)$ peut alors être exprimée comme suit :

$$S_{n>n}(\psi_0, \psi) = \begin{cases} 0, & \psi \in \langle 0, \psi_0 \rangle, \\ S_{n>n}(\psi), & \psi \in \langle 0, \psi_0 \rangle \end{cases} \quad (4.8)$$

Le développement en série de polynômes de Legendre est donné par :

$$\forall \psi \in \langle 0, \pi \rangle: \quad S_{n>n}(\psi_0, \psi) = \sum_{n=2n+1}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(\psi_0, \psi) P_n(\cos \psi) \quad (4.9)$$

Où $Q_n(\psi_0, \psi)$ décrivent les coefficients de troncation pour la fonction sphéroïde modifiée de Stokes $S_{n>n}(\psi_0, \psi)$. La contribution de la zone proche des anomalies de pesanteur à haute fréquence de Helmert à l'altitude géoïdale $N_{n>n}^h, \Omega_{\psi_0}$ co-géoïdale peut être décrite par :

$$N_{n>n}^h, \Omega_{\psi_0} = \frac{R}{4\pi \gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_{\psi_0}} \Delta g_{n>n}^h(R) S_{n>n}(\psi) d\Omega' \quad (4.10)$$

La contribution de la zone éloignée à haute fréquence des anomalies de pesanteur de Helmert $\Delta g_{n>n}^h(R)$ l'altitude co-géoïdal $N_{n>n}^h, \Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}}$ est donnée par :

$$N_{n>n}^h, \Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}} = \frac{R}{4\pi \gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}}} \Delta g_{n>n}^h(R) S_{n>n}(\psi) d\Omega' \quad (4.11)$$

Si les anomalies de pesanteur ne sont pas disponibles au-dessus de la Terre entière, le calcul numérique peut être fait en employant l'équation suivante :

$$N_{n>n}^h, \Omega_{\theta-\Omega_{\psi_0}}(\Omega) = \frac{R}{2} \sum_{n=n+1}^{\infty} Q_n(\psi_0, \psi) \sum_{m=-n}^n T_{n,m}^h \quad (4.12)$$

La relation entre l'ondulation du géoïde $N(\Omega)$ et l'ondulation du co-géoïde $N^h(\Omega)$ est présentée par la formule suivante :

$$\delta N(\Omega) = N(\Omega) - N^h(\Omega) = \frac{\delta V^t(R)}{\gamma_0(\phi)} - \frac{\delta V^a(R)}{\gamma_0(\phi)} \quad (4.13)$$

$\frac{\delta V^t(R)}{\gamma_0(\phi)}$ et $\frac{\delta V^a(R)}{\gamma_0(\phi)}$ sont respectivement l'effet topographique indirect primaire sur la hauteur géoïdale et l'effet atmosphérique indirect primaire sur la hauteur géoïdale.

4.2 Effet topographique indirect primaire

L'effet topographique indirect primaire sur la hauteur géoïdale prend la forme suivante [7] :

$$\begin{aligned} \frac{\delta V^t(R)}{\gamma_0(\phi)} = & \frac{G}{\gamma_0(\phi)} 4\pi \rho_0 \left[RH^0 + \frac{[H^0]^2}{2} - \frac{R^3 - R^3}{3R} \right] + \\ & \frac{G}{\gamma_0(\phi)} \rho_0 \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \int_{r=R}^{R+H'} N(R, \psi, r') r'^2 dr' d\Omega' - \\ & \frac{G}{\gamma_0(\phi)} \rho_0 \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \frac{r'^3 - R^3}{3} N(R, \psi, R) d\Omega' + \\ & \frac{G}{\gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \delta \rho(\Omega') \int_{r=R}^{R+H''} N(R, \psi, r') r'^2 dr' d\Omega' - \\ & \frac{G}{\gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \delta \rho(\Omega') \frac{r'^3 - R^3}{3} N(R, \psi, R) d\Omega' \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.3 Effet atmosphérique indirect primaire

L'effet atmosphérique indirect primaire sur l'altitude géoïdale peut être décrit par la forme de base suivante [11] :

$$\begin{aligned} \frac{\delta V^a(R)}{\gamma_0(\phi)} = & \frac{G}{\gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \int_{r=R+H^0(\Omega')}^{r_{lim}} \rho^a(r') N(R, \psi, r') r'^2 dr' d\Omega' - \\ & \frac{G}{\gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \int_{r=R+H^0(\Omega')}^{r_{lim}} \rho^a(r') N(R, \psi, R) r'^2 dr' d\Omega' \end{aligned} \quad (4.15)$$

L'ordre de grandeur de l'effet atmosphérique indirect primaire sur l'altitude géoïdale est relativement plus petit que l'effet topographique indirect primaire sur la hauteur géoïdale.

Une fois le potentiel perturbateur réel déterminé sur le géoïde, sa conversion en hauteurs géoïdales peut être effectuée par la formule de Bruns.

Le potentiel perturbateur réel $T(r)$ à l'extérieur de l'atmosphère est obtenu à l'aide d'un prolongement continu de $T(R)$. Le potentiel de pesanteur réel W , pour n'importe quel point donné, en dehors de l'atmosphère, est alors simplement calculé à partir de la formule de Bruns.

5. Application : Nord de l'Algérie

La détermination du géoïde, tenant compte des noyaux modifiés de Stokes, est effectuée à l'aide des programmes du logiciel GRAVSOFT et d'autres programmes réalisés au LAREG (Laboratoire de Recherche en Géodésie de l'Institut Géographique National, Marne la Vallée) et à l'ESGT (École Supérieure des Géomètres et Topographes) [2].

5.1 Description des données utilisées

Les données utilisées sont issues de différentes sources: données gravimétriques, modèle géopotential et modèle numérique de terrain.

Données gravimétriques: La zone d'étude est limitée entre [32°, 37°] en latitude et [-3°, 5°] en longitude et comprend 2064 points gravimétriques (Fig1). Ces données sont fournies par le BGI (Bureau Gravimétrique International de Toulouse). Elles sont extraites d'un fichier nommé EOL dont dispose le CTS. Ce choix est dû à la densité de points relativement élevée et à la nature du terrain dans cette région.

Données du modèle géopotential : Le modèle géopotential utilisé est le modèle EGM96 (Earth Geopotential Model - 1996), développé jusqu'au degré et ordre 360. Il résulte des données issues de l'analyse des orbites des satellites et de la gravimétrie de l'ancienne Union soviétique, l'Amérique du sud et l'Afrique.

Le modèle global d'élévation TUG87 qui contient la représentation harmonique sphérique de la topographie globale au degré et à l'ordre 180 a été également utilisé. Les coefficients pour la puissance de la topographie globale jusqu'au degré et à l'ordre 90 sont également disponibles pour l'évaluation des effets dus aux masses topographiques éloignées.

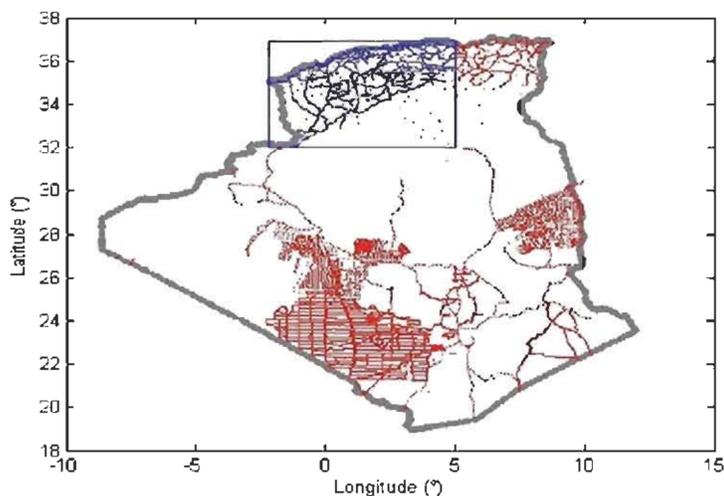


Fig 2. Domaine de calcul du géoïde et la répartition géographique des données gravimétriques.

Modèle numérique de terrain : Le calcul des effets de la topographie nécessite l'existence d'un modèle numérique de terrain de haute résolution. A cette fin et par manque d'un MNT précis sur l'Algérie, un modèle a été généré à partir des informations altimétriques liées aux observations gravimétriques fournies par le BGI. Ce MNT généré n'est pas plus homogène que la répartition des stations gravimétriques et présente quelques lacunes. C'est bien évidemment un handicap pour une solution définitive de géoïde [1].

Dans cette application deux modèles numériques de terrain ont été soustraits du modèle numérique de terrain GTOPO30 employés dans ces calculs numériques: le M.N.T Large (5' x 5') pour les zones éloignées du point de mesure et le M.N.T Fin (30" x 30") pour les zones proches de ce même point. Les surfaces océaniques sont indiquées par les valeurs 9999. Ces deux MNT sont illustrés dans les figures suivantes:

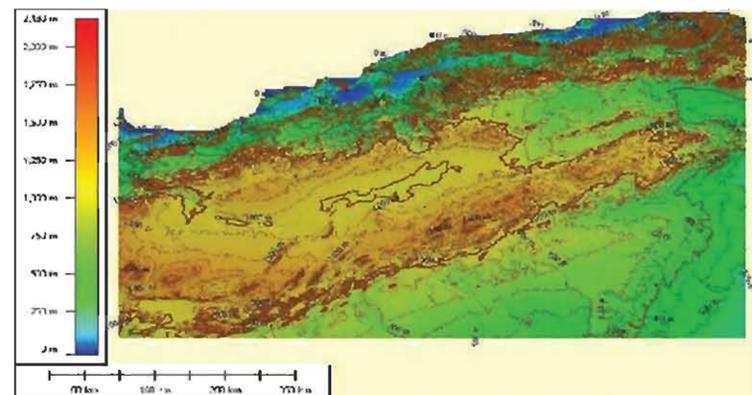


Fig 3. Modèle numérique de terrain (30''x30'')

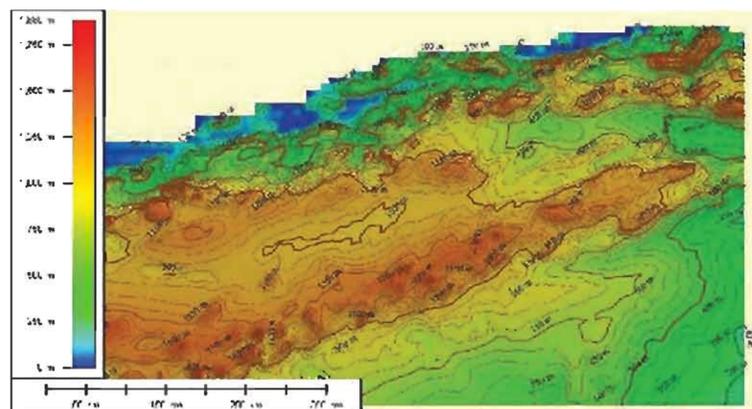


Fig 4. Modèle numérique de terrain (5'x5')

5.2 Traitement des données

Le programme dénommé "GEOGRID" et développé dans le cadre de cette application, permet de générer une grille gravimétrique à partir d'un échantillon de données réparties aléatoirement. Il est écrit en langage Fortran et il fait appel à plusieurs routines suivantes :

DTE : calcul de la contribution des zones proches à l'effet topographique direct sur la pesanteur.

DTF : calcul de la contribution des zones éloignées à l'effet topographique direct sur la pesanteur.

DAE : calcul de l'effet atmosphérique direct sur la pesanteur

PTE : calcul de la contribution des zones proches à l'effet topographique primaire direct sur l'ondulation du géoïde.

PTF : calcul de la contribution des zones éloignées à l'effet topographique primaire direct sur l'ondulation du géoïde.

STE : calcul de la contribution des zones proches à l'effet topographique secondaire indirect sur la pesanteur.

STF : calcul de la contribution des zones éloignées à l'effet topographique secondaire indirect sur la pesanteur.

GIN : transforme les anomalies de pesanteur via la formule de Stokes-Helmert en ondulations géoïdales.

5.3 Résultats obtenus et Analyse

Les statistiques des effets topographiques et atmosphériques de pesanteur sont fournies dans les tableaux suivants :

Tableau 1. Effets topographiques de pesanteur "zones proches"

Paramètre	Min	Max	Moy	σ
Effet ter. (mGal)	-0,06	417,06	13.10	41,6
Effet ter. cond. (mGal)	-110,75	468,7	1.69	29,92
Effet dir. (mGal)	-166,99	387,03	11.41	36,17
Effet sec. ind. (mGal)	-0.4721	-0.0009	-0.0250	0.0519
Effet prim. ind.(m)	-1,283	-0,003	-0,136	0,095

Tableau 2. Effets topographiques de pesanteur "zones éloignées"

Paramètre	Min	Max	Moy	σ
Effet ter. (mGal)	-31,38	117,136	60.938	36,529
Effet ter. Cond. (mGal)	-31,43	117,424	61.039	36,628
Effet dir. (mGal)	-0,311	0,066	-0.101	0,105
Effet sec. Ind. (mGal)	-0.059	0.068	-0.007	0.0256
Effet prim. Ind. (m)	-0,079	0,165	0,0615	0,0419

Tableau 3. Effets atmosphériques de pesanteur

Paramètre	Min	Max	Moy	σ
Effet atm. Dir. (mGal)	0,6603	0,9064	0,807	0,0295
Accél. plateau sph. cond. (mGal)	-0,8692	-0,715	-0,787	0,032
Accél. Résid. Atm. Accid. (mGal)	-0,102	0,042	0,0127	0,0063

Le tableau (4) présente les statistiques correspondant aux ondulations du co-géoïde N^h et les ondulations du géoïde N :

Tableau 4. Statistiques des ondulations du géoïde et du co-géoïde

Paramètre	Min	Max	Moy	σ
Ondulation du co-géoïde(m)	6.21	68.91	33,43	13,65
Ondulation du géoïde (m)	5,61	68,69	33,20	13,96

On constate bien que l'ondulation du co-géoïde se rapproche de l'ondulation du géoïde (différence ≈ 23 cm), ceci est dû probablement à l'influence des effets topographiques.

Pour mettre en évidence la précision du modèle du géoïde gravimétrique estimé, une étude comparative entre les hauteurs géoïdales calculées par voie gravimétrique et les ondulations du géoïde dérivées à partir des observations GPS et de nivellement de précision (points GPS nivelés), tel que :

$$N_{(GPS/Nivellement)} = h_c - H^o$$

Où h_c et H^o représentent respectivement la hauteur ellipsoïdique obtenue par GPS et l'altitude orthométrique déterminée par nivellement. Ces trois quantités doivent être d'une part, référencées au même ellipsoïde, et d'autre part, de précision comparables.

Dans le cas de notre application, l'absence d'informations relatives à la précision des mesures gravimétriques et à l'inexistence d'un modèle numérique de terrain réel, ainsi que l'insuffisance d'observations ne permettent pas d'effectuer une analyse de précision réelle et fiable.

6. Conclusion

La résolution du problème de valeurs aux limites géodésiques dans l'espace de Helmert nécessite une évaluation des valeurs moyennes des anomalies de pesanteur de Helmert sur la surface de la Terre.

Ces valeurs dépendent des valeurs moyennes des anomalies de pesanteur à l'air libre, des corrections ellipsoïdales à la perturbation de pesanteur, de la correction ellipsoïdale due à l'approximation sphérique, des effets topographiques et atmosphériques directs, des effets topographiques et atmosphériques indirects secondaires et de la correction du géoïde/quasi-géoïde.

Les principaux facteurs limitant la théorie de "Stokes-Helmert" sont l'approximation de la densité topographique réelle par la surface topographique de Stokes, la détermination des données de pesanteur pour le prolongement descendant, l'effet topographique direct primaire, et l'approximation sphérique du géoïde dans le cas de l'évaluation des effets topographiques.

Références Bibliographiques:

- Aarizou. M., 1995 : "Détermination précise du géoïde par voie gravimétrique", Thèse de magister. C.N.T.S/Arzew.
- Duquenne H., 2005: "Le géoïde et les méthodes locales de sa détermination", Ecole francophone sur le géoïde .IGN/Paris.
- Heiskanen W., Moritz H., 1967: "Physical geodesy". San Francisco.
- Huang J., 2002: "Computational Methods for the Discrete Downward Continuation of the Earth Gravity and Effect of Lateral Topographical Mass Density Variation on Gravity and the Geoid". Ph.D.Theses. UNB, Fredericton.
- Helmert, F.R. (1884): "Die mathematische und physikalische Theorien der höheren Geodasie". Vol.2, B.G.Teubner, Leipzig
- Kellogg O.D., 1929: "Foundations of potential theory". Springer. Berlin.
- Martinec Z., 1993: "Effect of laterally variations of topographical masses in view of improving geoid model accuracy over Canada". Final Report of contract DSS No.23244-2-4356, Geodetic Survey of Canada, Ottawa.
- Martinec Z., Vaníček P., 1994a: "Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical approximation of the geoid". Manuscripta Geodaetica, No.19. Springer
- Martinec Z., Vaníček P., 1994b: "The indirect effect of topography in the Stokes-Helmert technique for a spherical approximation of the geoid". Manuscripta Geodaetica, No.19: 213-219.
- Martinec Z., 1996: "Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains". Journal of Geodesy, Vol. 70.Springer.
- Novák P., 2000: "Evaluation of gravity data for the Stokes-Helmert solution to the geodetic boundary-value problem". Ph.d. dissertation, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report No. 207, university of New Brunswick, Canada.
- Ralston a., 1965: "A First Course in Numerical Analysis". McGraw-Hill/New York.
- Vaníček P., Sun W., Ong P., Martinec Z., Najafi M., Vajda P., Horst B., 1996 : "Downward Continuation of Helmert's gravity". Journal of Geodesy 71: 21-34

Vaniček P., Martinec Z., 1994:"The Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid". Manuscripta Geodaetica, No.19., Springer

Vaniček p., Novák p., 1999; "Comparison between planar and spherical models of topography" CGU Annual Meeting, Banff, May 9-12, 1999 vol.2.
