La modélisation sous forme de programme linéaire : Outil efficace d'aide à la décision

BOUMEDJANE Adel
Maître assistant –A- Université de Biskra
Faculté des sciences économiques et de gestion
Département de la gestion

ACHI Adel
Maître assistant –B- Université de Batna
Faculté des sciences économiques et de gestion
Département de la gestion

الملخص :

يواجه المسيرون العديد من القرارات المرتبطة بالأمثلية، ويتناول هذا المقال فعالية النمذجة في شكل برنامج خطي في الممارسات التسييرية سواء تعلقت بتعظيم الأرباح أو تدنية التكاليف . حيث نهدف إلى توضيح النقاط التالية : مفهوم البرنامج الخطي ومراحل صياغته، مسائل التوزيع، المزج، ومسائل التدفق الأعظمي

Résumé :

Une partie importante de problèmes de décision que rencontrent les dirigeants sont sans aucun doute les problèmes d'optimisation linéaire ou programmes linéaires, cette article traite d'efficacité de la modélisation sous forme d'un programme linéaire dans la pratique managériale , en mettant l' accent sur les axes suivants :la notion du programme linéaire et les étapes pour le formuler ,les problèmes de répartition ,de transport et de flot maximale

Introduction

Une partie importante de problèmes de décision que rencontrent les dirigeants dans la pratique sont sans aucun doute les problèmes d'optimisation linéaire ou programmes linéaires. Un programme linéaire se définit par ses composantes, une fonction, dite économique ou objective, à maximiser ou à minimiser, les contraintes de problème qui s'expriment par égalités ou inégalités, et les contraintes de non négativité c'est-à-dire les variables ne peuvent être que positives ou nulles (presque toujours ces variables prennent le sens de quantités).

La résolution d'un problème de la programmation linéaire ne pose incontestablement aucune difficulté car il y a des méthodes pratiques pour le résoudre ,plus cela on peut utiliser des logiciels très efficaces pour la résolution .Mais le problème capital est celui de formuler un problème ,si possible ;comme un programme linéaire

La problématique que nous tentons de poser est :Est-ce que peut recourir à une classification méthodique pour rendre la modélisation sous forme du programme linéaire très aisée ?

1. La notion de programme linéaire et sa formulation :

Tous les programmes linéaires comportent trois éléments capitaux : la fonction économique ou objective ; les contraintes de problème ; et les contraintes de non négativité.

La fonction objective est une fonction linéaire dépendante de variables à déterminer appelées variables de décision ou variables d'activité. Son expression mathématique :

$Z=c_1x_1+ c_2x_2+ c_3x_3+....+ c_nx_n$

$x_1, x_2,\ldots, x_n$: sont les variables de décision.

$c_1, c_2,\ldots, c_n$: sont les coefficients des variables dans la fonction objective.

Ces coefficients sont des constantes (profits, coûts, productivité, heures de travails …) La fonction précédente soit à maximiser ou soit à minimiser, selon la nature de problème.

Les contraintes de problème s'expriment sous la forme d'équations ou d'inéquations ou des deux ensemble.

$a_{11}x_1+ a_{12}x_2+....+ a_{1n}x_n\ (\leq , = , \geq)\ b_1$

$a_{21}x_1+ a_{22}x_2+....+ a_{2n}x_n\ (\leq , = , \geq)\ b_2$

……………………………..

$a_{m1}x_1+ a_{m2}x_2+....+ a_{mn}x_n\ (\leq , = , \geq)\ b_m$

a_{ij} (i=1,2,...m, j=1,2,...n) et b_i (i=1,2,…m) sont des constantes

b_i : valeurs des seconds membres.

a_{ij} : généralement sont les coefficients technologiques de chaque activité (j) par rapport à la ressource (i).

Parce qu'on s'intéresse uniquement à des problèmes qui ont une signification pratique, cela implique que les variables de décision doivent être positives ou nulles.

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, … $x_n \geq 0$.

Le rassemblement des éléments précédents forme le modèle mathématique de la programmation linéaire (le programme linéaire).

Pour modéliser un problème sous forme d'un modèle linéaire, il est généralement recommandé de procéder à une analyse dont les étapes sont les suivantes :

1. Quelles sont les activités qui sont associées au problème ? le niveau de chaque activité doit être présenté par une variable de décision unique, une définition soignée des variables peut faciliter la modélisation.

2. Quelles sont les contraintes du problème ? on formule les contraintes qui délimitent les valeurs que peuvent prendre les variables.

3. Quelle est la mesure d'efficacité associée aux variables du problème ? c'est-à-dire quels sont les coefficients des variables dans la fonction objective ?

4. Les valeurs que peuvent prendre les variables sont-elles entières ou fractionnaires ? Si elles sont fonctionnaires on écrit $x_j \geq 0$, et si elles sont entières, on écrit x_j entier et non négatif.[1]

<u>2. Les problèmes de répartition :</u>

Comme on l'a citée précédemment, la programmation linéaire s'applique à la répartition de ressources limitées entre des activités en concurrence les unes avec les autres, afin d'optimiser la fonction objective. Parmi les problèmes de répartition les plus fréquents le problème de production où l'on cherche soit à maximiser les profits en utilisant au mieux certaines ressources limitées, soit à minimiser les coûts en s'assurant qu'un certain nombre de spécifications sont satisfaites.

***<u>2.1. Le problème de l'agriculture</u>*:**

Une exploitation agricole décide de consacrer au maximum 20 hectares à la culture de carottes, de navets et de poireaux. Elle doit pour cela utiliser deux types d'engrais : e_1, e_2, qu'elle possède qu'en quantités limitées (08 quintaux pour e_1, 06 quintaux pour e_2). Pour cultiver la terre, l'exploitation dispose d'un budget de 100000DA.

Les années précédentes ont montré que les quantités d'engrais et les dépenses nécessaires par hectare de culture des déférents produits agricoles sont les suivantes :

	Carottes	Navets	Poireaux
Engrais e_1	40 Kilos	25 Kilos	30 Kilos
Engrais e_2	25 Kilos	30 Kilos	20 Kilos
Dépenses / DA	6000	5000	5000

Un hectare de carottes procure un bénéfice net de 12000DA, un hectare de navets procure un bénéfice net de 10000DA, et un hectare de poireaux procure un bénéfice net de 10000DA.

Dans ces conditions, combien d'hectares l'exploitation doit-elle consacrer à chacun des produits pour maximiser son profit ?

Pour élaborer le modèle linéaire, on va suivre les étapes citées auparavant.

Les activités correspondent aux différentes cultures possibles. Le niveau de chaque activité est le nombre d'hectares consacrés à chacun des produits.

Nous avons donc les variables :

x_1 : nombre d'hectares consacré à la culture de carottes.

x_2 : nombre d'hectares consacré à la culture de navets.

x_3 : nombre d'hectares consacré à la culture de poireaux.

Ce problème est assujetti à des contraintes, la première contrainte est relative à la quantité d'engrais e_1 dont dispose l'exploitation agricole qui ne peut excéder 800Kilos. Ainsi, si l'exploitation cultive x_1 hectare de carottes, x_2 hectare de navets et x_3 hectare de poireaux, elle doit consommer $40x_1$, $25x_2$ et $30x_3$ kilos d'engrais e_1. Cette quantité d'engrais e_1 consommé ($40x_1+25x_2+30x_3$) ne peut excéder les 800 kilos disponibles. Cette contrainte s'exprime mathématiquement par l'inéquation suivante :

$40x_1+25x_2+30x_3 \leq 800$

L'expression mathématique pour les autres contraintes se fait de même :

La contrainte d'engrais e_2 : $25x_1 + 30\,x_2 + 20\,x_3 \leq 600$

La contrainte de budget : $6000x_1+5000x_2+5000x_3 \leq 100000$

La contrainte de superficie : $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$

L'exploitation cherche manifestement à déterminer le nombre d'hectares de (x_1, x_2, x_3) qui va maximiser le profit total. Les bénéfices unitaires sont : 12000DA pour x_1, 10000DA pour x_2 et 10000DA pour x_3, le profit total à maximiser sera

$Z = 12000x_1 + 10000x_2 + 10000x_3$.

De plus, les variables de décision, x_1, x_2 et x_3 ne peuvent être négatives parce qu'elles représentent la superficie qui peut être fractionnaire. Les variables de non négativité sont : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

En rassemblant les expressions mathématiques obtenues, on obtient le programme linéaire comme suit :

Maximiser $Z = 12000x_1 + 10000x_2 + 10000x_3$.

Avec les contraintes

$40x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 800$

$25x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 600$

$6000x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 \leq 100000$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

2.2. Le problème du découpage :

Une entreprise fabrique des meubles à partir des plaques de bois. Les plaques ont une longueur de deux mètres et une largeur d'un mètre et dix centimètres. L'entreprise consomme les plaques en les découpant longitudinalement. Les besoins de l'entreprise sont les suivants : 1000 plaques de 16 centimètres, 1200 plaques de 20 centimètres et 1800 plaques de 25 centimètres. Pour satisfaire ses besoins, l'entreprise utilise cinq plans de découpage dont les caractéristiques sont données ci-dessous :

Plan numéro	Nombre de plaques			Pertes (cm)
	16 cm	20 cm	25 cm	
1	2	0	3	3
2	3	3	0	2
3	5	0	1	5
4	4	1	1	1
5	1	2	2	4

L'entreprise cherche à satisfaire les besoins en minimisant les pertes de découpage.

Pour ce problème, on dénombre cinq variables de décision :

x_1 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 1

x_2 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 2

x_3 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 3

x_4 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 4

x_5 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 5

Les contraintes de ce problème sont la satisfaction des besoins qui s'expriment par les inéquations suivantes :

La contrainte des plaques de 16cm : $2x_1+3x_2+5x_3+4x_4+1x_5 \geq 1000$

La contrainte des plaques de 20cm : $0x_1+3x_2+0x_3+1x_4+2x_5 \geq 1200$

La contrainte des plaques de 25cm : $3x_1+0x_2+1x_3+1x_4+2x_5 \geq 1800$

L'entreprise vise à minimiser les pertes du découpage. L'expression de la fonction objective est :

Minimiser $Z = (3x_1+2x_2+5x_3+1x_4+4x_5)$

Les valeurs de variables de décision ne peuvent être que entières et non négatives, parce que le nombre des fois ne peut être plus fractionnaire, on écrit donc : x_j (j=1,2,…,5) entier et non négatif.

3. Les problèmes de mélange

Pour mieux comprendre les problèmes de mélange, on débutera par les définir, puis on donnera un exemple qui illustre le modèle linéaire de problème de mélange.

3.1. La notion des problèmes de mélange :

On dit qu'un preneur de décision est devant un problème de mélange lorsqu'il doit combiner au moins deux ressources afin de fabriquer un ou plusieurs produits. Cependant, le nombre d'unités de chaque ressource nécessaires pour fabriquer une unité de chaque produit n'est pas déterminé. Chaque ressource contient un ou plusieurs ingrédients fondamentaux et le mélange doit être fait de façon telle que les produits fabriqués remplissent certaines spécifications concernant ces ingrédients.

3.2. Problème de l'industrie alimentaire[*] :

la société ELBARAKA des produits agro-alimentaires veut fabriquer deux types de sauce tomate : la sauce à la viande et la sauce aux champignons. La composition de ces produits doit respecter les spécifications suivantes :

Ingrédients	Sauce à la viande	Sauce aux champignons
Bœuf haché	Pas moins de 40%	Aucune spécification
Champignons	Aucune spécification	Pas moins de 30%
Concentré de tomate	Pas plus de 35%	Pas plus de 50%
Conservateurs	Pas plus de 5% et pas moins de 2%	Pas plus de 5% et pas moins de 2%

La société peut acheter jusqu'à 4000kilogrammes de bœuf haché par jour à 300DA le kilogramme, 3200 kilogrammes de champignons à 350DA le kilogramme, 6000 kilogrammes de concentré de tomate à 100DA le kilogramme et 200 kilogrammes de conservateurs à 250DA le kilogramme. Le prix de la sauce à viande est de 600DA le kilogramme et celui de la sauce aux champignons est de 700DA le kilogramme, le marché est illimité.

La société cherche à déterminer quelles quantités fabriquées quotidiennement de chacune des sauces afin de maximiser les profits.

Les conditions de problème de mélange se réalisent dans ce problème. On va maintenant analyser le problème en premier lieu par définir les activités, il nous paraît pour la première fois que les variables de décision sont : x_1 : la quantité fabriquée de sauce à la viande et x_2 : la quantité fabriquée de sauce aux champignons. Ce raisonnement est logique, mais ne permet pas d'exprimer les spécifications et les disponibilités de chacun des ingrédients.

Etant donné que les spécifications des sauces dépendent des quantités utilisées de chacun des ingrédients, on définit les variables de décision comme étant les quantités de chaque ingrédient utilisées dans chaque sauce. Les variables de décision sont :

x_1 : La quantité de bœuf haché utilisée dans la sauce à la viande ;

x_2 : La quantité de concentré de tomate utilisée dans la sauce à la viande ;

x_3 : La quantité de conservateur utilisée dans la sauce à la viande ;

x_4 : La quantité des champignons utilisée dans la sauce aux champignons ;

x_5 : La quantité de concentré de tomate utilisée dans la sauce aux champignons ;

x_6 : La quantité de conservateur utilisée dans la sauce aux champignons.

Dans les problèmes de mélange, on a deux types de contraintes :

1. Les contraintes de disponibilités :

- Contrainte de bœuf haché $x_1 \leq 4000$
- Contrainte des champignons $x_4 \leq 3200$
- Contrainte de concentré de tomate $x_2 + x_5 \leq 6000$
- Contrainte de conservateurs $x_3 + x_6 \leq 200$

2. Les contraintes de spécification :

La quantité de sauce à la viande est égale à $x_1 + x_2 + x_3$ et celle de la sauce aux champignons est égale à $x_4 + x_5 + x_6$.

- La quantité de bœuf haché utilisés dans la sauce à la viande doit être supérieure ou égale 40% de sauce à la viande, on écrit la contrainte comme suit :

$x_1 \geq 40\% \ (x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow 0.6\, x_1 - 0.4\, x_2 - 0.4\, x_3 \geq 0$

de même pour les autres contraintes.

$$\begin{array}{r} x_2 \leq 35\% \ (x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow \\ 2\% \ (x_1 + x_2 + x_3) \leq \ x_3 \leq 5\% \ (x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -0.35\, x_1 + 0.65\, x_2 - 0.35\, x_3 \leq 0 \\ -0.02\, x_1 - 0.02\, x_2 + 0.98\, x_3 \geq 0 \\ -0.05\, x_1 - 0.05\, x_2 + 0.95\, x_3 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} x_4 \geq 30\% \ (x_4 + x_5 + x_6) \Rightarrow \\ x_5 \leq 50\% \ (x_4 + x_5 + x_6) \Rightarrow \\ 2\% \ (x_4 + x_5 + x_6) \leq \ x_6 \leq 5\% \ (x_4 + x_5 + x_6) \Rightarrow \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0.7\, x_4 - 0.3\, x_5 - 0.3\, x_6 \geq 0 \\ -0.5\, x_4 + 0.5\, x_5 - 0.5\, x_6 \leq 0 \\ -0.02\, x_4 - 0.02\, x_5 + 0.98\, x_6 \geq 0 \\ -0.05\, x_4 - 0.05\, x_5 + 0.95\, x_6 \leq 0 \end{array} \right.$$

De plus, les variables sont fractionnaires et non négatives

$x_j \geq 0$,($j= 1,2,\ldots.6$).

L'objectif de la société est la maximisation de profit total, on le calcule comme suit :

Le profit Z = les recettes – les dépenses

$Z= [\ 600(x_1+ x_2+ x_3) + 700\ (x_4+ x_5+ x_6)] - [\ 300x_1+ 350x_4+ 100(x_2+ x_5) + 250(x_3+ x_6)]$

$= 300x_1 + 500x_2 + 350x_3 + 350x_4 + 600x_5 + 450x_6$

La fonction objective est :

Maximiser $Z= 300x_1 + 500x_2 + 350x_3 + 350x_4 + 600x_5 + 450x_6$

4-Les problèmes de transport :

On dit que l'on se trouve en présence d'un problème de transport lorsqu'un preneur décision veut transporter certaines quantités d'un produit à partir de certaines origines jusqu'à certaines destinations afin de minimiser les coûts de transport.

Une entreprise stocke un produit dans deux dépôts D_1 et D_2 situés dans deux villes. Les quantités stockées sont respectivement de 300 et 200 unités. Ces deux dépôts approvisionnent trois points de vente P_1,P_2 et P_3 situés également dans des villes différentes. Les quantités demandées par les trois points de vente sont respectivement de 150 , 180 et 120 unités. Les coûts unitaires pour transporter une unité de chaque dépôt vers chaque point de vente sont inscrits dans le tableau suivant :

	P_1	P_2	P_3
D_1	25	30	34
D_2	23	25	35

Le problème de cette entreprise est de savoir comment distribuer les produits des dépôts vers les points de vente afin de minimiser le coût total du transport.

Les variables de décision de ce problème sont les quantités transportées :

x_{11} : quantité transportée de D_1 vers P_1

x_{12} : quantité transportée de D_1 vers P_2

x_{13} : quantité transportée de D_1 vers P_3

x_{21} : quantité transportée de D_2 vers P_1

x_{22} : quantité transportée de D_2 vers P_2

x_{23} : quantité transportée de D_2 vers P_3

Dans ce problème, il y a deux types de contraintes, les contraintes de capacité et les contraintes de demande. La capacité des dépôts (500 unités) est supérieure à la demande des points de vente, cela implique que les contraintes de capacité soient de nature inférieure ou égale à et les contraintes de demande soient de nature d'égalité[2].

Les contraintes de capacité sont :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 300$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 200$$

Les contraintes de demande :

$$x_{11} + x_{21} = 150$$

$$x_{12} + x_{22} = 180$$

$x_{13} + x_{23} = 120$

La fonction objective est à minimiser :

$$Z = 25\, x_{11} + 30\, x_{12} + 34x_{13} + 23\, x_{21} + 25x_{22} + 35x_{23}$$

Les variables de problème sont entières et non négatives , on écrit :

x_{ij} entier et non négatif, i = 1,2 , j = 1,2,3.

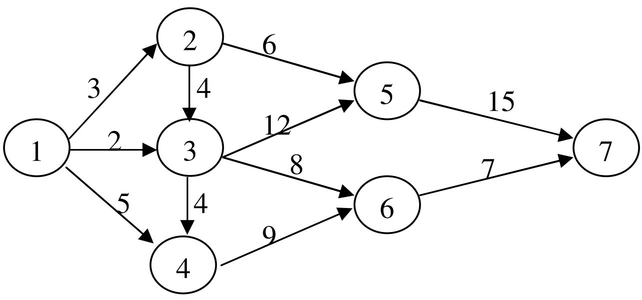
Autres types de problèmes qui peuvent être formulés en tant que programmes linéaires :

Il y a plusieurs problèmes qui appartiennent à la théorie des graphes peuvent être formulés comme des programmes linéaires, on cite à titre d'exemple le problème du flot maximal, le problème de plus court chemin, le modèle CPM … et d'autre problèmes comme la théorie des jeux[3]. Ces problèmes ont leurs propres algorithmes de résolution, mais on peut les écrire comme des modèles linéaires et les résoudre.

On s'intéresse ici au problème de flot maximal

Problème de flot maximal :

Considérons l'exemple suivant : la figure ci-dessous représente un pipe-line entre la ville 1 (entrée ou source) et la ville 7 (sortie ou puits) avec 5 villes intermédiaires. Chaque arc représente une conduite entre deux villes intermédiaires et la limite de capacité de chaque arc est indiquée (en milliers de barils par jour). Dans ce problème on cherche à s'assure que le pipe-line est utilisé de façon optimale.



Soit x_{ij} les variables de décision qui symbolisent le nombre de barils écoulant la voie située entre la ville i et la ville j. Dans ce problème, on a 11 variables (le nombre de variables est le nombre des arcs). Sur chaque voie les capacités sont limitées, on a donc les contraintes suivantes[4] :

$x_{12} \leq 3$, $x_{13} \leq 9$, $x_{14} \leq 5$, $x_{23} \leq 4$, $x_{34} \leq 4$, $x_{25} \leq 6$, $x_{35} \leq 12$, $x_{36} \leq 8$, $x_{46} \leq 9$, $x_{57} \leq 15$, $x_{67} \leq 7$,

Au nœuds 2,3,4,5 et 6 les barils entrant doivent être égaux aux barils sortant :

Point 2 : $x_{12} = x_{25} + x_{23}$

Point 3 : $x_{13} + x_{23} = x_{35} + x_{36} + x_{34}$

Point 4 : $x_{14} + x_{34} = x_{46}$
Point 5 : $x_{25} + x_{35} = x_{57}$
Point 6 : $x_{36} + x_{46} = x_{67}$

Parce que le flot maximal ne peut pas dépasser $x_{12}+ x_{13}+ x_{14}$ (la source) ou $x_{57}+ x_{67}$ (le puits), la fonction objective à maximiser est la suivante

$Z = x_{12}+ x_{13}+ x_{14}$ Ou $Z= x_{57}+ x_{67}$

De plus $x_{ij} \geq 0$ pour toutes les voies.

Conclusion :

La programmation linéaire est la méthode la plus puissante parmi les autres méthodes de la recherche opérationnelle. en effet ,elle peut d'une part fournir aux gestionnaires des applications fertiles en tant qu'applicable au niveau de chaque fonction qu'exerce l'entreprise ,Donc c'est l'omniprésence de cette méthode , et d'autre part elle peut être utilisée pour résoudre d'autres problèmes de la recherche opérationnelle comme :plut court chemin ,théorie des jeux ,flot maximal , CPM.PERT.

La bibliographie

- Abdelouahab Zaatri, Les techniques de la recherche opérationnelle : cours et exercices corri
- gés, Collection les mathématiques à l'université, Algérie 2002
- F. Droesbeke, M. Hallin, CL. Lefevre, Programmation linéaire par l'exemple, Ellipses, Paris 1986.
- Gerard Desbazeille, Exercices et problèmes de recherche opérationnelle, Dunod, 2ème édition, Paris 1976.
- Michel Nedzela, Introduction à la science de la gestion, 2ème édition , Presses de l'université du Québec.
- Yvon Perrault, recherche opérationnelle : techniques décisionnelles,4ème édition, gaêtan morin éditeur, Canada 1980.

[1] Dans des cas particuliers ,les variables de décision sont du type (zéro –un) .un c'est exécuter l'activité et zéro c'est ne l'exécuter pas.

[*] Le problème de mélange s'applique aux plusieurs problèmes, on cite à titre d'exemple : les problèmes de portefeuille financière, les problèmes de l'industrie pétrolière …….

[2] Si la capacité des dépots est égale à la demande des points de vente ,les contraintes du problème sont tous de nature d'egalité.

[3] On résout le problème de la théorie des jeux par la programmation linéaire dans le cas ou le cas jeu ne possède pas de point- selle unique et que la partie comporte plusieurs coups .

[4] Le nombre des contraintes est le nombre des arcs et des villes intermédiaires.