خفض التجريد في الرياضيات: حالة المناهج-السنة الأولى متوسط بالجزائر نموذجا

Reducing abstraction in mathematics: the case of curriculums-first middle schoolin Algeriaas a model

أ.بوضياف محمد[1]*، د. طالبي محمد الطاهر[2]، أ.د. حازي محمد[3]، أ. شطيطح محمد[4]

1- مخبر تعليمية العلوم بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة، (الجزائر)،
mohamed.boudiaf@g.ens-kouba.dz

2- مخبر تعليمية العلوم بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة، (الجزائر)، Tahar.talbi@hotmail.fr

3- مخبر تعليمية العلوم بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة، (الجزائر)، hazi@hotmail.fr

4- مخبر تعليمية العلوم بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة، (الجزائر)،
chetitahens@gmail.com

تاريخ الاستلام:2020/03/11 تاريخ القبول:2021/06/02

الملخص

حاولت هذه الدراسة بحث إشكالية تعامل كل من منهاج الرياضيات ووثيقته المرافقة (مرحلة التعليم المتوسط بالجزائر) مع التجريد في السنة الأولى متوسط. اعتمدنا في إنجازها على المنهج الوصفي التحليلي والإطار المسمى "خفض التجريد" كأداة للتحليل والتفسير.

هدفت الدراسة إلى تحقيق جملة من الأهداف أهمها:

- إثراء النقاش الدائر حول التجريد في تعليم وتعلّم الرياضيات.
- معرفة مكانة التجريد في الوثيقتين السالف ذكرهما، ومدى جعله ملائما للنمو المعرفي للمتعلّمين.
- المساهمة في توسيع نطاق استخدام الإطار المسمى "خفض التجريد".

خلصت الدراسة إلى تبوء التجريد مكانة متميزة في كل من المنهاج ووثيقته المرافقة حيثعملا على جعل التعلّمات المستهدفة في متناول المتعلّمين إلى حد ما ممّا يعكس إمكانية توسيع نطاق استخدام وتطبيق الإطار المسمى "خفض التجريد" إلى القطب التربوي (المنهاج، الكتاب المدرسي، المعلّم).

الكلمات المفتاحية: تعليمية الرياضيات، التجريد، خفض التجريد، منهاج الرياضيات، التعلّم.

---

* المؤلف المرسل: أ.بوضياف محمد

Abstract:

This study tried to investigate the problem of dealing with both the mathematics curriculum and its accompanying document (intermediate education stage in Algeria) with abstraction in the first year average. In our achievement, we relied on the descriptive analytical approach and the framework called "abstraction reduction" as a tool for analysis and interpretation.

The study aimed to achieve a number of objectives, the most important of which are:

- Enriching the debate on abstraction in teaching and learning mathematics.
- Knowing the place of abstraction in the aforementioned documents, and the extent of making it appropriate for the cognitive development of learners.
- Contribute to expanding the use of the framework called "abstraction".

The study concluded that abstraction occupies a distinct position in both the curriculum and its accompanying document, and that the latter two work to make the targeted learning accessible to learners to some extent (with a lower abstraction level), which reflects the possibility of extending the use and application of the framework called "abstractionreduction" to the educational pole (Curriculum, school book, teacher).

Keywords: educational mathematics; abstraction; reducing abstraction; mathematics curriculum; learning.

مقدمة

تكتسي دراسة وتحليل الوثائق التربوية ومختلف الظواهر المتعلقة بالتعليم والتعلّم أهمية بالغة في النشاط التعليمي الحديث؛ وهو ما يطرح صعوبات جمّة للمدرّسين على وجه الخصوص ويشكّل تحديا كبيرا بالنسبة لهم. عندما يتعلق الأمر بالرياضيات فإن حجم الصعوبات والتحديات يكون مضاعفا، ويرجع ذلك بالأساس إلى الطبيعة التجريدية التي تتميّز بها مفاهيم هذا الحقل العلمي.

تعدّ مرحلة التعليم المتوسط المحطة الأساسية للشروع في التعامل مع الكائنات أو المفاهيم الرياضياتية المجردة بشكل صريح، وحتى يدرك المتعلّم جوهر هذه الكائنات، لا بد له من مزاولة نشاط تجريدي. لكن تحقيق ذلك يتوقف على مدى قدرة المعلّم على تصميم التعلّمات بشكل ملائم لنموهم المعرفي. إن التجريد، بصفته نشاطا عقليا

معقّدا، بات محل اهتمام متنام في تعليمية الرياضيات خصوصا خلال العقود الأخيرة(Hazzan, 1999). لعلّ أبرز ما تمخّض عن الدراسات التي عنيت بهذا المفهوم، ما يعرف بفكرة "خفض التجريد" (1999) التي تحوّلت إلى إطار نظري سرعان ما أثبت نجاعته في تحليل وتفسير كيفية تعامل الطلبة مع التجريد في ميادين متعددة من الرياضيات وعلوم الكمبيوتر. الأمر الذي حفّزنا على محاولة استغلاله في فهم كيفية تعامل كل من منهاج الرياضيات ووثيقته المرافقة (مرحلة التعليم المتوسط بالجزائر) مع تجريد التعلّمات المستهدفة في السنة الأولى متوسط تحديدا ممّا يعكس أهمية هذه الدراسة.

تتمثّل **إشكالية الدراسة** في كون التجريد أحد أهمّ الإجراءات والأدوات المعرفية التي لا يمكن الاستغناء عنها في تعلّم الرياضيات وإدراك كائناتها المثالية(Radford et al., 2009). لكنه في ذات الوقت يمثل أحد الأسباب الرئيسية للفشل في تعلّم الرياضيات(Ferrari, 2003).بعبارة أخرى، يعتبر التجريد أداة ضرورية لاستيعاب وتعلّم الرياضيات من جهة، ويمثّل مصدرا رئيسا للفشل في تعلّمها من جهة أخرى. إنها بحق مفارقة مثيرة للاهتمام ودافعة للبحث، ولعلّ السؤال المركزي الذي يمكنه تأطير هذه الإشكالية ويستحق البحث هو:

كيف تمّ التعامل مع التجريد الرياضياتي في منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط ووثيقته المرافقة خصوصا ما تعلّق بالسنة الأولى من هذه المرحلة؟

يمكن أن يتفرع عن هذا السؤال السؤالان الفرعيان التاليان:

1) ما هو مفهوم التجريد في الرياضيات؟ وماذا يعني قولنا أنّ الرياضيات مجرّدة؟
2) ما هي أهمّ الإجراءات والتدابير المتخذة في منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط ووثيقته المرافقة والتي من شأنها المزاوجة بين حفظ مكانة التجريد في المادة من ناحية، وضمان حق المتعلّم في تعلّمها بيسر من ناحية أخرى؟

تفحصهذه الدراسة**الفرضية** التالية:"يعمل كل من منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط ووثيقته المرافقة على خفض مستوى تجريد المفاهيم الموجهة للتعلّم.

تهدف الدراسة إلى تسليط بعض الضوء على مفهومالتجريد في الرياضيات والوقوف على مكانته ومكانه في المنهاج المذكور، ومدى العمل على جعله ملائما للنمو المعرفي لمتعلّمي هذه المرحلة، وتصبو خلف ذلك إلى تحقيق غرضين رئيسيين:

- إثراء النقاش المتعلّق ببناء هياكل معرفية جديدة.
- المساهمة في توسيع نطاق استخدام وتطبيق الإطار المسمى "خفض التجريد".

الإجابة عن السؤال المركب الأول، تطلّبت منّا الرجوع إلى بعض الأدبيات التربوية والفلسفية المتعلّقة بالرياضيات والتجريد. أما الإجابة عن السؤال الثاني فتطلبت منا الاعتماد على المنهج الوصفي التحليلي واستخدام الإطار المسمى "خفض التجريد".

مفهوم التجريد في الرياضيات

ظل التجريد في الرياضيات وما يزال موضوع نقاش متكرّر منذ أرسطو وأفلاطون، ورغم تباين المواقف اتجاهه واختلاف وجهات النظر حوله إلا أنّ القاسم المشترك في هذه النقاشات الحديث الدائم عن مفهومين متلازمين يعكسان صنفين من التجريد في الرياضيات ألا وهما التجريد والمجرد. فقد أكد سكامب(Skemp1986) بهذا الخصوص على أهمية التمييز بين التجريد كنشاط أو عملية والتجريد كمنتَج (ما ينجم عن عملية التجريد)، واقترح من أجل ذلك تسمية الأخير "بمفهوم"(Mitchelmore & White, 2004). يتمثّل التجريد كعملية في التغاضي عن بعض عناصر كائن أو مجموعة من الكائنات والتركيز على ما نراه أساسيا. أما التجريد كمنتَج (كمفهوم) فما هو إلا خلاصة تلك العملية. ينجرّ عن هذا أنّ المفاهيم الرياضياتية ما هي إلا نتاج لعمليات تجريدية سابقة (مجردات "مفاهيم"). توصف هذه الكائنات بالمجردة لكونها مستقلة عن الخبرة المادية والاجتماعية(Mitchelmore & White, 2004). كما أن الرياضيات، حسب

سفارد، تبدأ حيث تنتهي الكائنات الحقيقية الملموسة وحيث يبدأ التفكير في خطابنا حول هذه الكائنات(Sfard, 2008, p. 129).

يتضح ممّا تقدم أن التجريد مفهوم معقّد من عدة وجوه ما جعله يستقطب، في السياق التربوي العام، اهتمام العديد من النفسانيين والتربويين خلال النصف الثاني من القرن الماضي على غرار باث وبياجيوغيرهما(Piaget et al., 1966). كما استقطب هذا المفهوم، في السياق الخاص بالبحث في تعليمية الرياضيات، اهتمام العديد من التعليميين الرياضياتيين أين تمّت مناقشته من زوايا مختلفة انصبّت في مجملها حول مكان ومكانة التجريد في تعلّم الرياضيات. (Tall, 1991; Noss & Hoyles, 1996; Frorer et al., 1997)

نوقش مفهوم التجريد أيضا في المنتدى العالمي للرياضيات سنة 2002 من خلال التعرض لثلاث نظريات تجريدية ومقارنتها بشكل نقدي، تهدفكلها إلى توفير وسيلة لوصف العمليات التي تنطوي على ظهور هياكل أو بنى عقلية جديدة (Hazzan & Zazkis, 2005). تمَّ التأكيد في هذا الملتقى على ضرورة التّمييز بين التجريد الذي يخص الكائنات الرياضياتية (التجريد في الرياضيات) والتجريد الذي يخص عمليات التفكير (التجريد في تعلّم الرياضيات). رغم عدم وجود إجماع حول معنى واحدا لمفهوم التجريد إلا أن ثمَّة اتفاق على ما يلي(Hazzan, 1999):

- يمكن تناول التجريد من وجهات نظر مختلفة.
- بعض أنواع المفاهيم أكثر تجريدا من غيرها.
- القدرة على التجريد مهارة هامة لحدوث تفاعل تام مع الرياضيات.

1. مفهوم خفض التجريد

خفض التجريد في الرياضيات وصفٌ يطلق على كل إجراء يستهدف جعل التعامل مع مفهوم أو مهمّة رياضياتية ممكنا، أي تيسير عملية التعامل مع المجرد. بمعنى جعل المفهوم (أو المهمّة) في متناول الإدراك العقلي للشخص المفكّر (ملائم لبنيته العقلية).

يمكن أن يصدر هذا الإجراء عن المتعلم أو عن القطب التربوي (المنهاج، الكتاب المدرسي، المدرّس). يستخدمه المتعلّم كوسيلة أو استراتيجية لتحصيل الفهم وتجاوز ما يصادفه من عقبات في أداء بعض المهمّات، ويستخدمه القطب التربوي كوسيلة أو استراتيجية لتيسير التعلّم.

تبلور مصطلح "خفض التجريد" كإطار نظري لتحليل وتفسير تعامل المتعلّمين مع التجريد على يد الباحثة حازان(Hazzan, 1999)، وتمّ استخدامه كأداة لفحص سلوك المتعلمين حيال التجريد في ميادين متعددة من الرياضيات وخارجها أهمها: الجبر المجرد(Hazzan, 1999)، المعادلات التفاضلية(Raychaudhuri, 2001)، الرياضيات المدرسية (Hazzan & Zazkis, 2005) ، هياكل المعطيات "DataStructures" (Aharoni, 1999) والحاسوبية "Computability"(Hazzan, 2003). كما استخدم ذات الإطار من قبل سيبدي(Subedi, 2014) كأداة لفحص سلوك مدرّسي الرياضيات اتجاه التجريد لأجل تيسير التعلّم.

1.1.تفسيرات مستويات التجريد التي يقوم عليها إطار"خفض التجريد":

يعتمد الإطار النظري المسمى "خفض التجريد" على ثلاثة تفسيرات لمستويات التجريد تمّت مناقشتها في أدبيات الرياضيات التربوية وهي:

1.1. مستوى التجريد كنوعية العلاقات بين موضوع التفكيروالشخص المفكّر

يرى ولينسكي(Wilensky, 1991, p. 198)أن التجريد ليس خاصية متأصّلة في الكائن، إنما صفة للعلاقة التي تربط شخصا معينا بهذا الكائن. فما هو مجرد بالنسبة لشخص الآن قد لا يكون كذلك في وقت لاحق، وبالتالي مستوى تجريد مفهوم ما بالنسبة لشخص، يتوقف على نوعية العلاقة التي تربطهما. هذا ما يفسر ميل معظم المتعلّمين للتعامل مع المفاهيم الأكثر ألفة لديهم. فعلى سبيل المثال، لحساب مجموع أو جداء عددين مكتوبين في نظام غير عشري، يفضّل المتعلّمين التحوّل إلى النظام العشري وإنجاز الحسابات ثم العودة مجددا إلى النظام المعطى.

1.1.1. مستوى التجريد كانعكاس للثنائية عملية-كائن

يقوم هذا التفسير على وجهات نظر العديد من النظريات التي اهتمت بتطوّر المفاهيم في الرياضيات التربوية، بالخصوص الازدواجية عملية- كائن من نظرية APOS (عمل، عملية، كائن، مخطط) لديبنسكي(Dubinsky, 1991)، وكذا أعمال سفارد (Sfard, 1991).تتفق هذه النظريات على أن تعلّم المفهوم كعملية يسبق تعلّمه ككيان، مما يعنيأنّ المفهوم كعملية أقل تجريدا منه ككائن؛وهذا ما يفسّر ميل معظم المتعلّمين إلى التعامل مع الجانب الخوارزمي للمفاهيم بدل التعامل مع جانبها البنيوي. على سبيل المثال، لمعرفة فيما إذا كان العدد $3^2 \times 5^3 \times 7^4$ يقبل القسمة على 7 أو على 105، يفضّل المتعلّمون إجراء الحسابات ثم التصريح بالنتيجة بدلا من ملاحظة بنية العدد وكتابته على شكل ملائم.

1.1.1.1. مستوى التجريد كدرجة تعقيد المفهوم للتّفكير

يستند هذا التفسير إلى اعتقاد سائد مفاده "أنّ الكيان الأكثر تركيبا أو ارتباطا هو الأكثر تجريدا" وهذا ما يجعل معظم المتعلّمين يفضّلون التعامل مع مركبات الكائن الرياضياتي كلّ على حدى إن كان مركبا، أو التعامل مع المفهوم بقطع الاتصال بالمفاهيم المرتبطة معه إن كانت له روابط مع مفاهيم أخرى. على سبيل المثال، لمعرفة فيما إذا كان هنالك عدد من المجال الطبيعي [15783,15793] يقبل القسمة على 7، يفضّل معظم المتعلّمين فحص جميع قيم المجال عوض تأمل خصائصه ككيان موحد.

1.2. تيسير تعلّم الرياضيات من منظور إطار خفض التجريد

أ) **من وجهة النظر العلائقية للتجريد:** بناء "علاقة صحيحة ونوعية" مع مفهوم أو مهمة جديدة، بالنسبة للمتعلّم، يقتضي انتقاء أو بناء أنشطة تعلّمية خصبة من حيث السياق والمضمون (إعطاء معنى للتعلّمات أو تعزيزه، ثراء التمثيلات، تغذية التفاعلات والروابط مع المفهوم).

ب) من وجهة نظر الازدواجية عملية-كائن للتجريد:

بناء مفهوم جديد، بالنسبة للمتعلّم، يقتضي المرور بمحطتين أساسيتين:

- **تكوين مفهوم تشغيلي:** يتطلّب انتقاء أو بناء أنشطة تعلّمية تسمح للمتعلّم بممارسة بعض العمليات على المفهوم في بعض الوضعيات والسياقات الخاصة، وذلك بقدر ما يسمح له باكتشاف بعض التقنيات ولمس أهميتها في حل بعض المشكلات.

- **تكوين مفهوم هيكلي:** يتطلّب اكتشاف خصائص ومميزات المفهوم والقدرة على توليفها واستخدامها بمعزل عن أيّ سياق، بمعنى المرور من المفهوم التشغيلي إلى كائن رياضياتي. يتطلب هذا المرور ثلاث مراحل أساسية (Sfard, 1991, p. 18):

- **مرحلة التوطين:** تركيز نشاطات المتعلّم على الإجراءات المرتبطة بإبراز جميع خصائص المفهوم بشكل منفصل (من الإجراء إلى الخاصية).
- **مرحلة التكثيف:** تركيز نشاطات المتعلّم على استخدام خصائص المفهوم المتوصل إليها في المرحلة السابقة في سياقات أخرى (ما بين الخاصية والإجراء ذهاب وإياب).
- **مرحلة إعادة التأهيل:** تركيز نشاطات المتعلّم على تمييز خصائص المفهوم وإقامة روابط بينها بقدر ما يمَكّنه من رؤيتها مندمجة بشكل شبه تام.

ج) من وجهة نظر درجة تعقيد التجريد للتفكير:

بناء مفهوم جديد، بالنسبة للمتعلّم، يقتضي الانطلاق من وضعية أو مهمّة مركبة والتركيز على اكتشاف الخصائص الأساسية المميّزة للمفهوم، ثم الاشتغال بواسطتها منفردة ومجتمعة، وذلك من خلال أنشطة تعلّمية مناسبة. تستكمل عملية بناء المفهوم بالرجوع إلى وضعيات أو مهمّات مركبة لتعويد المتعلّمين على التعامل معه ضمن حقل مفاهيمي يسمح باستغلال ارتباطاته الممكنة في أداء بعض المهمات المعقّدة.

عرض وتحليل نتائج الدراسة

تمّ التأكيد في ديباجات المنهاج على أهمية تطوير قدرات وكفاءات المتعلّم على التجريد حيث ورد في فقرتي تقديم المادة وغايات تدريس الرياضيات حرفيا: "يساهم تعلّم الرياضيات واستعمالها بقدر كبير في اكتساب كفاءات ذهنية وتطويرها بشكل منسجم، وذلك على مستوى اكتساب كفاءات التجريد والقدرة على توظيف الرياضيات لترجمة مشكلة مجرّدة أو ملموسة لها علاقة بالحياة اليومية أو بالمواد التعليمية الأخرى (الفيزياء، علوم الطبيعة والحياة، الإحصاء والإعلام الآلي، علم الزلال، ...) في تعبير خاص بالرياضيات" (المنهاج، 2016، ص3). يعكس ذلك المكانة المرموقة التي حظي بها التجريد في المنهاج.

قدمت الوثيقة المرافقة للمنهاج من جانبها تعريفا واضحا لمفهوم التجريد جاء كالتالي: "إنّ التجريد نشاط ذهني يتمثل في القدرة على تمييز خصائص مشتركة لعدة ظواهر أو أشياء في مجموعة مركبة، والرجوع إليها بواسطة تعبير من صنف رمزي. نعني بالتجريد سيرورة مفهمة (conceptualisation) وتصنيف، كما نعني به كذلك نتيجة هذه السيرورة " (الوثيقة المرافقة، 2016، ص 32). راهنت الوثيقة المرافقة على مادة الرياضيات في بناء هذا الشكل الجديد للتفكير الذي يبرز تدريجيا عند مراهقي هذه المرحلة التعليمية حيث جاء في نفس الصفحة "إنّ المفهوم الذي ينتج عن سيرورة المفهمة يعتبر، في آن واحد، أداة لفهم الواقع ومرآة تعكس ما فهمناه. هذا المفهوم لا يعكس الواقع في شموليته، لكنّه يوافق ترجمتنا الأقرب له في سياق معيّن، سواء كان ذلك عمليا أو نظريا"، بمعنى أنّ الوظيفة الأساسية لسيرورة التجريد إنما تتمثّل في إعطاء معنى للواقع المركب الذي يحيط بنا.

أما بخصوص تيسير التعلّم، فقد رصدنا مجموعة من التدابير والتوصيات التي تمثّل شواهد عن نوايا حقيقية لخفض التجريد؛ سواء على مستوى الديباجات وهيكلة البرامج أو على مستوى مضامين البرامج.

شواهد عن خفض التجريد على مستوى الديباجات وهيكلة البرامج السنوية:

أولا- على مستوى الديباجات: قدّم منهاج الرياضيات توجيها عاما لتنصيب كفاءة القدرة على إجراء التجريد لدى متعلّمي مرحلة التعليم المتوسط جاء فيه حرفيا:

- "ينتقل المتعلّم تدريجيا من الملاحظة والمعالجة اليدوية إلى تمثيلات متنوعة أكثر تجريدا.
- يمارس المتعلّم المنهجية العلمية بتنمية قدراته على التجريد والتخيّل والاستدلال والتحليل النقدي" (المنهاج، 2016، ص4).

يمكن تفسير هذا التوجيه من وجهات النظر الثلاث لإطار "خفض التجريد" كالتالي:

- العمل به يؤدي إلى بناء علاقة نوعية بين المتعلّم والمفاهيم المجرّدة.
- يشير بوضوح إلى أن سيرورة التعلّم والاكتساب تبدأ كعملية ثم تتحول إلى كائن.
- يوحي التوجيه السابق بأنّ التجريد كيان بالغ التركيب مما يتطلب التدرج في تعلّمه.

تكفّلت الوثيقة المرافقة، بدورها، بشرح كيفية اكتساب وتطوّر أدوات التفكير لأجل التجريد عند المراهق، وكذا مراحل تطوّر الاستدلال لديه حيث جاء في هذا الشأن (الوثيقة المرافقة، 2016، ص 32):

- الانتقال من الواقع إلى الممكن.
- ممارسة الاستدلال التجريبي.
- النشاط على فرضيات وقضايا دون سند محسوس وإجراء تحويلات.

ثانيا- على مستوى هيكلة البرامج السنوية: تمّ تنظيم البرامج السنوية لمادة الرياضيات في منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط في مصفوفات على النحو التالي:

جدول رقم 1: مصفوفة البرامج السنوية

نص الكفاءة الشاملة		الهدف العام المنتظر تحقيقه في نهاية سنة دراسية (يحل مشكلات ...)				
الميدان	الكفاءات الختامية	مركبات الكفاءة	المحتويات	أنماط من الوضعيات	معايير للتقويم	الحجم الزمني
أنشطة عددية تنظيم معطيات أنشطة هندسية	ثلاثة أهداف خاصة منتظرة التحقيق "هدف لكل ميدان" (يحل مشكلات)	ثلاث مركبات: - معرفية؛ - فعلية؛ -قيمية سلوكية.	مضامين معرفية	وضعيات من الحياة لتعزيز المعنى	ثلاثة معايير: -اكتساب معارف؛ -توظيف معارف؛ - اكتساب قيم.	

يبرز هذا الجدول أنّ اكتساب المفاهيم يمر عبر مجابهة مشكلات وأداء مهمّات، ولجعلها في متناول المتعلّمين، ركّز المنهاج في عمود مركبات الكفاءة على إعطاء معنى للتعلّمات وممارسة مختلف العمليات عليها بما يقود إلى اكتشاف ما تنطوي عليه من خواص ومميزات، وكذا اكتساب بعض التقنيات التي تؤدي إلى التحكّم فيها وحسن استغلالها وتوظيفها. كما عُمل في عمود أنماط الوضعيات على تعزيز خفض التجريد من خلال الحثّ على تلبيس التعلّمات سياقات واقعية قدر المستطاع.

شواهد عن خفض التجريد على مستوى برنامج السنة الأولى متوسط

أمثلة حول النمط الأول "نوعية العلاقات"

مثال1: دراسة الأعداد الطبيعية والأعداد العشرية-كتابة وحسابا (المنهاج ص17)

المحل المحتمل للتجريد: مهمات رياضياتية ترتبط بالفهم والاستخدام السليم (اختيار عمليات مناسبة، إجراء خوارزميات حسابية متنوعة بشكل سليم "ذهنية، آلية،... "، مقارنة وترتيب وتمثيل أعداد مكتوبة بصيغ مختلفة).

- **تدابير تتعلق بسياق أنشطة التعلّم:** حث المنهاج المدرّسين على اختيار أنماط من الوضعيات التعلّمية المرتبطة بالحياة اليومية (الزيادة، النقصان، التضاعف، توزيع الحصص، الكلفة، ...)، أي التعامل مع العمليات وإجراء الخوارزميات الحسابية ضمن وسط مألوف لدى المتعلّم. دون شك أنّ ذلك يحفّز المتعلّم على الانخراط في العمل

وإنجاز بعض المهمّات المقترحة، وبالتالي التحضير لبناء علاقة نوعية مع العمليات التي تنطوي عليها تلك المهمّات.

- **تدابير تتعلق بخصائص ومضامين أنشطة التعلّم** (ثراء التمثيلات، تغذية التفاعلات والروابط مع المفهوم):

تضمّن عمود "أنماط الوضعيات التعلّمية" (جدول البرنامج السنوي ص 17 و18) مجموعة من التوصيات التي من شأنها إثراء تمثيلات المفاهيم وتعزيز تفاعلات وروابط المتعلّم معها. تتلخص هذه التوصيات في اقتراح وضعيات تسمح بما يلي:

- اكتشاف العمليات المناسبة وإجرائها بشكل سليم.
- ممارسة بعض تقنيات الحساب العددي على أعداد طبيعية أو عشرية مكتوبة بصيغ مختلفة لامتلاك بعض خواص الحساب الحرفي والمقارنة التي يكشف عنها لاحقا.
- اكتشاف قواعد قابلية القسمة على 2، 3، 4، 5، 9 وإجرائها بشكل سليم.
- استخدام الآلة الحاسبة في تقدير نتيجة حساب أو التحقق من صحة تخمينات.
- إبراز أنّ عملية الضرب لا تكبّر دوما.
- التمييز بين طبيعة عدد وكتاباته الممكنة، وكذا الانتقال بين الكتابتين العشرية والكسرية لعدد عشري.

أكّدت الوثيقة المرافقة بدورها (ص 3) مبدأ التعلّم القائم على إعطاء المتعلّم معنى لما يتعلّمه وقدمت في هذا الشأن مثالا يبرز أهمية استغلال الكتابات المختلفة للعدد العشري 15.256 في جعل المتعلّم يثري قراءاته ذات الدلالة بالنسبة لهذا العدد:

$$15.256 = \frac{15256}{1000} = 15 + \frac{256}{1000} = 15 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$$

العدد المعتبر يُقرأ 15 فاصلة 256 ويعني 15256 جزءا من الألف أو 15 وحدة و256 جزءا من الألف أو كذلك 15 وحدة وجزأين من 10 و5 أجزاء من 100 و6 أجزاء من 1000. إنه بحق إثراء لتمثيل الأعداد العشرية وتغذية للتفاعلات والروابط معها.

مثال2: الأعداد النسبية (المنهاج ص18)

المحل المحتمل للتجريد: مفهوم العدد النسبي

- **تدابير تتعلق بسياق أنشطة التعلّم:** حثّ المنهاج مدرّسي الرياضيات على اختيار أنماط من الوضعيات التعلّمية المرتبطة بالحياة اليومية لمقاربة مفهوم العدد السالب (الربح، الخسارة، درجة الحرارة، ...). دون شك أنّ استغلال ألفة المتعلّم للمفاهيم اليومية المذكورة يسهم في نشاط المتعلّم ولمسه لمفهوم العدد النسبي.
- **تدابير تتعلق بخصائص ومضامين أنشطة التعلّم:** قدم المنهاج في العمود الخاص بأنماط الوضعيات توجهات تتعلق بكيفية تناول مفهوم العدد النسبي منها:

- يمكن الانطلاق من تأمل وضعية مألوفة (درجات الحرارة مثلاالتي تعرض يوميا في النشرات الجوية) للفت انتباه المتعلّمين إلى وجود نوع جديد من الأعداد بالنسبة لهم.
- إبراز الحاجة إلى هذا النوع الجديد من الأعداد في حل معادلات يتعذر حلها باستخدام الأعداد المألوفة ممّا يعكس وجاهة إدراج أعداد سالبة.
- اقتراح وضعيات مناسبة للتدرب على مقارنة عددين نسبيين وترتيب أعداد نسبية.
- إبراز وظيفية الأعداد النسبية بيانيا (تدريج مستقيم، قراءة فاصلة نقطة في معلم خطي وإحداثيتي نقطة في معلم للمستوي، تعليم نقطة في معلم خطي وفي معلم مستو).

أمثلة حول النمط الثاني "الازدواجية عملية- كائن"

مثال3: الكتابات الكسرية (المنهاج ص19)

المحل المحتمل للتجريد: التعامل مع الكسر كعملية وكعدد (مفهوم العدد الناطق).

- **تدابير** تتعلق بتكوين المفهوم التشغيلي: أوصى المنهاج باقتراح مهمّات تسمح بـ:
- التمييز بين طبيعة عدد وكتاباته الممكنة.
- التعامل مع الكسر كعملية قسمة والتحضير للانتقال إلى مفهوم الكسر كعدد.
- تمثيل بعض الكسور بيانيا (شريط، مخطط دائري، مرصوفة، مستقيم مدرج ...).

- **تدابير تتعلق بتكوين المفهوم الهيكلي:** اقتراح مهمّات رياضياتية تسمح للمتعلّم بالانتقال من مفهوم الكسر كعملية إلى مفهوم الكسر كعدد وفق التدرج التالي:

- ترجمة كتابة كسرية بتعابير مختلفة (مثال: العدد 5/3 هو ثلث 5، 5 مرات ثلث، العدد الذي إذا ضُرب في 3 يعطي 5 وهو كذلك العدد الذي إحدى قيمه المقربة 1,66) مع استخلاص مفهوم الكسر كعدد وتمييزه عن عملية القسمة.
- اكتشاف خصائص الكسر (اختزال وتساوي كسرين) والاشتغال بواسطتها(التوطين).
- الانتقال بين الإجراء والخاصية (تبرير تساوي كسرين بالخصوص) (التكثيف).
- ممارسة الجمع والطرح والضرب على الكسور كأعداد (الاقتصار على الكسور العشرية)(إعادة التأهيل).

مثال4: التناظر المحوري (المنهاج ص21)

المحل المحتمل للتجريد: استخدام التناظر المحوري في إنجاز مهمّات استدلالية

- **تدابير تتعلق بتكوين المفهوم التشغيلي:** أوصى المنهاج المدرّسين بما يلي:

- اقتراح وضعيات تتيح للمتعلّم استخدام اليد الحرة والطيّ والورق الشفّاف على كائنات وأشكال مألوفة (أوراق نبات، أعلام، أشكال هندسية بسيطة، ...).
- اقتراح وضعيات للتعرف على أشكال متناظرة (تعيين ورسم محاور تناظر أشكال).
- اقتراح مهمّات تتعلق بإنشاء نظائر (نقطة، مستقيم، قطعة مستقيم، دائرة، شكل بسيط) بالنسبة إلى مستقيم، واكتشاف خواص هذا التحويل النقطي (حفظ الأشكال، المسافات و أقياس الزوايا).

- **تدابير تتعلق بتكوين المفهوم الهيكلي:**

- استعمال التناظر المحوري في إنشاء مضلّعات خاصة.
- التعرّف على محور قطعة مستقيم ومنصّف زاوية وإنشائهما.
- اقتراح وضعيات يُستعمل فيها التناظر المحوري كأداة لتبريرات بسيطة.

كما أوصت الوثيقة المرافقة (ص 7) بمواصلة الارتكاز على تقنية الطيّ المستخدمة في إدخال مفهوم التناظر المحوري في مرحلة التعليم الابتدائي واستغلالها في اكتشاف خواص هذا التحويل الضرورية لإنشاء بعض الأشكال الهندسية وتبرير بعض خواصها.

أمثلة حول النمط الثالث "درجة تعقيد المفهوم للتفكير"

مثال5: الحساب الحرفي (المنهاج ص19)

المحل المحتمل للتجريد: تعدّد معاني الحرف والمساواة في عبارة رياضياتية.

يقبل المتعلّم على مرحلة التعليم المتوسط بعد أن يكون قد مارس "الحساب العددي" على أعداد طبيعية ثمّ عشرية في مرحلة تعليمه الابتدائي. تتواصل هذه الممارسة وتتوسع لتشمل أعداد من طبيعة أخرى (نسبية، ناطقة وحتى بعض الأعداد الصماء) طيلة مرحلة التعليم المتوسط. لكن بالموازاة مع ذلك وابتداء من السنة الأولى لهذه المرحلة، يشرع المتعلّم في ممارسة نمط جديد من الحساب "الحساب الحرفي". يتميّز هذا النمط بالارتقاء في مستوى تجريد الكائنات التي يمارس عليها الحساب حيث يتم الانتقال من التعامل مع أعداد صريحة إلى أعداد مخفية معبّر عنها بحروف.

يتطلب الانتقال من الحساب العددي إلى الحساب الحرفي المرور بمرحلتين أساسيتين؛ مرحلة التواصل مع الحساب العددي ثم مرحلة القطيعة معه. تقتصر المرحلة الأولى على إبراز أهمية إدراج الحرف في حلّ بعض المشكلات الرياضياتية وضرورة ذلك في حلّ بعضها الآخر مع إدراك المعنى الذي يأخذه الحرف في الوضعية وما يصحبه من معنى للمساواة. أما المرحلة الثانية، فتستهدف تعلّم بعض الخواص والمفاهيم الجبرية (خواص العمليات والمساواة؛ مفهوم المعاكس، المقلوب، النشر، التحليل،...) واستخدامها في حل مشكلات جبرية. يتضح من هذا أن موضوع "الحساب الحرفي" مركب لكونه ينطوي على كثير من المفاهيم المترابطة مما يرشحه لتعقيد تفكير المتعلّم عند مجابهته لمشكلات أو مهمّات تتعلّق بهذا الموضوع.

- **تدابير تتعلق بسياق أنشطة التعلّم:** يندرج مقرر السنة الأولى من التعليم المتوسط، فيما يتعلّق بالحساب الحرفي، ضمن المرحلة الأولى (مرحلة التواصل مع الحساب العددي). حثّ المنهاج على الشروع في هذا الموضوع ضمن أنشطة عددية مع استثمار سياقات مألوفة لدى المتعلّم (تعابير لغوية، أشكال هندسية، مخططات، ...).
- **تدابير تتعلق بخصائص ومضامين أنشطة التعلّم:** أوصى المنهاج بما يلي:

- إتمام مساواة تتضمن فراغا (معادلة بمجهول واحد) "إدراج الحرف غير ضروري".
- اقتراح وضعيات للانتقال من عبارات لفظية مكتوبة إلى صيغة حرفية اقتصادية.
- اقتراح وضعيات تستهدف وصف سلسلة حسابات حرفية بسيطة.
- تطبيق قاعدة حرفية في وضعية بسيطة (محيط، مساحة، حجم، ...).
- اقتراح وضعيات تستهدف إبراز أهمية إدراج حرف (النمذجة أو الترييض).
- اقتراح وضعيات للتدرب على التعميم والاستدلال ضمن أنشطة عددية.

لخّصت الوثيقة المرافقة الكفاءة المستهدفة للحساب الحرفي، بالنسبة للسنة الأولى متوسط، في "تطبيق قانون في وضعية بسيطة" واقترحت استغلال بعض القواعد الخاصة بحساب محيطات ومساحات أشكال هندسية مألوفة (ص 4)، وكذا تناول وضعيات لتلخيص سلسلة حسابات وترجمة عبارة لغوية بإدراج حرف مؤكّدة بأنّ ذلك يسمح للمتعلّم بالعمل على قواعد كتابات العبارات واستعمال الأقواس وملاحظة أن رمز المساواة غير مرتبط بالحصول على نتيجة. كما صرّحت الوثيقة أنّ السنتين الأولى والثانية من التعليم المتوسط تمثّلان محطة لتحضير الانتقال التدريجي إلى الحساب الحرفي من خلال مقاربته بتغيير كتابات عبارات عددية، واستعمال الأقواس وفهم عبارة تتضمّن حروفا، وحل معادلات بسيطة، واستعمال قوانين (محيطات، مساحات، حجوم، ...). صرّحت ذات الوثيقة بالمعاني المختلفة لاستخدامات الحرف في الرياضيات

وما يصحبه من معان للمساواة، كما أبرزت مراحل حل مشكل جبريا ووضّحت ذلك بواسطة مثال (أنظر الوثيقة المرافقة، ص 64 و65).

مثال6: إنجاز مماثلات أشكال مستوية بسيطة (المنهاج ص20)

المحل المحتمل للتجريد: الانتقال من الرسم إلى الإنشاء

يرتكز ميدان الأنشطة الهندسية بالأساس على أشياء (نقط، مستقيمات، مضلعات،...) وعلاقات (تعامد، توازي، استقامية، ...).تحظى دراسة الأشكال الهندسية باهتمام خاص في المناهج حيث يُشرع في تعلّمها مبكرا بما يتناسب والنمو النفسي- المعرفي للمتعلّم. يتركّز نشاط المتعلم في مرحلة التعليم الابتدائي على الرسم بينما يتوسع ذلك ليشمل الإنشاء في مرحلة التعليم المتوسط، وهما شيئان مختلفان تماما؛ إذ يتميّز الرسم بكونه تقريبي لأنه يعتمد على اليد الحرّة والأدوات الهندسية، في حين يتميّز الإنشاء بالدقة لأنه يعتمد على الخواص ويقوم على الاستدلال. بعبارة أخرى، يعتمد الرسم على المحسوس بينما يعتمد الإنشاء بالدرجة الأولى على المجرد ويشمل الرسم. الإنشاء الهندسي مفهوم مركب وغالبا ما يطرح صعوبات جمّة لدى معظم المتعلّمين. ولعلّ استخدام المناهج الحديثة لمصطلح "إنجاز مماثل شكل" (الذي يعني مفهوم الإنشاء) هو أبرز إجراء يعبّر عن خفض للتجريد لأجل تعلّم الإنشاء وبعث الطمأنينة في نفوس المتعلّمين.

- **تدابير تتعلق بسياق أنشطة التعلّم:** أوصى منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط (ص 20) بتناول موضوع "إنجاز مثيل شكل" في سياق يتضمن أشياء هندسية مألوفة لدى المتعلّم(ضمن نطاق ما تعرّض له في مرحلة التعليم الابتدائي).
- **تدابير تتعلق بخصائص ومضامين أنشطة التعلّم:** تتميّز مرحلة التعليم المتوسط عن سابقتها بالانتقال من التركيز على الصفات الإجمالية إلى التركيز على الخصائص الأساسية للأشكال الهندسية مما جعل المنهاج يحثّ على استغلال خبرة المتعلّم حول

الأشكال الهندسية المألوفة التي يُفترض أنه اكتسبها في مرحلة تعليمه الابتدائي، وتكليفه بإنجاز بعض المهمّات مثل:

- الرسم على ورقة غير مسطّرة لمستقيم مواز أو عمودي على مستقيم ويشمل نقطة معلومة من المستوي.
- إنجاز مماثلات لأشكال هندسية (قطعة مستقيم، زاوية، مضلعات خاصة، قوس) على ورقة غير مسطّرة ودون التقيد بطريقة (ورق شفاف، مدور، منقلة).
- الاستعمال السليم للمصطلحات والرموز والتشفير في أشكال هندسية مألوفة.
- التعرّف على شكل هندسي مألوف من بين أشكال مركبة وإنجاز مثيل له.
- رسم أو إتمام رسم شكل هندسي مركب من أشكال هندسية مألوفة.

كما أوصى المنهاج (ص 20) باقتراح وضعيات تسمح بانتقال تدريجي من هندسة إدراكية (تعتمد على المشاهدة) أو هندسة أداتية (تعتمد على الأدوات الهندسية) إلى هندسة استنتاجية (تعتمد على الخواص والعلاقات)، والقيام بتبريرات واستدلالات بسيطة. أوصى المنهاج كذلك باقتراح وضعيات لوصف شكل هندسي، أو كتابة برنامج يسمح بإنجاز شكل مماثل لشكل معطى لإبراز أهمية التعاريف والخواص المتعلقة بالأشكال.

وصفت الوثيقة المرافقة من جانبها "إنجاز مثيل لشكل هندسي" بكونه نشاط يدعو المتعلّم إلى تحليل هذا الشكل وتعيين بعض خصائصه التي تساعد على الإنجاز. كما ذكّرت بأنّ إدراك المتعلّم للأشكال، في مرحلة التعليم الابتدائي، يكون بصفة إجمالية ولا يُهتم بالميزات أو الخواص التي تنبني على منطق استنتاجي. لكنفي مرحلة التعليم المتوسط، إلى جانب مواصلة تطوير قدرات المتعلّم المتعلّقة بكل من الهندستين الملاحظاتية والأداتية، ينبغي الشروع في تعلّم هندسة استنتاجية (ترتكز على التعاريف والخواص والنظريات وتقوم على الاستدلال والبرهان). أكّدت الوثيقة المرافقة أيضا على ضرورة تمكين المتعلم من التمييز بين الرسم والإنشاء منذ السنة الأولى متوسط: "الرسم

مهمّة أداتية بحتة تتمثّل في إنجاز شكل باليد الحرة أو بواسطة أدوات هندسية ولا يهم في ذلك تبرير الإجراءات المستعملة في الإنجاز، المهم الحصول على شكل تقريبي صحيح يحقق الشروط المطلوبة. يتمثّل الإنشاء في إنجاز شكل يحقق شروطا معيّنة وفق إجراءات مبنية على خواص الشكل وتلك الشروط بحيث يكون شرح الإجراءات المستعملة وتبريرها بنفس أهمية الشكل الناتج. تنجز مهمّة الإنشاء في مرحلتين: مرحلة التحليل، وتتمثل في رسم شكل باليد الحرة واستخدامه في البحث والتعرّف على الشروط المتعلّقة بخواصه واللازمة لإنجازه. عندما تحدّد هذه الشروط تأتي مرحلة التركيب وإنجاز الشكل المطلوب. يدرك المتعلّمين أهمية مرحلة التحليل من خلال حل مشكلات الإنشاء ويتمثل نشاطهم في: تكوين صورة ذهنية للشكل المطلوب ورسمه باليد الحرة واستعمال التشفير المناسب والتعرّف على خواص الشكل واختيار الوجيهة منها ثم تحديد إجراءات التركيب المناسبة". كما أشارت الوثيقة المرافقة إلى إمكانية استغلال برمجيات الهندسة الحركية في تعزيز إدراك المتعلّمين للفرق بين الرسم والإنشاء (أنظر الوثيقة المرافقة ص 5، 66، 67).

نموذج عن استخدام الأنماط الثلاث لخفض التجريد في التفسير

مثال7: التناسبية (المنهاج ص19)

المحل المحتمل للتجريد: مهمّات رياضياتية تتعلق بخواص التناسبية (الخطية "التجميع والتجانس"، معامل التناسبية) وتطبيقاتها المختلفة.

يعد موضوع التناسبية أحد أهم المواضيع المهيكلة لبرامج الرياضيات المدرسية في مختلف المراحل التعليمية. يتميّز تعلّمه بالاستمرارية مع التركيز على الشروع بجانبه العمل يقبل اكتشاف خواصه والتصريح بها ممّا يعكس سعي المناهج إلى تنصيب وبناء علاقة نوعية للمتعلّم مع هذا المفهوم عبر بنائه كمفهوم تشغيلي ثم كمفهوم هيكلي. لأن موضوع التناسبية ينطوي على عدة مفاهيم (النسبة المئوية، المقياس، الحركة المنتظمة،

تحويل وحدات المقادير "الطول، المساحة، الحجم"، الزمن والسرعة، ...) ويؤسس لمفهوم الدالة الخطية، فهو يجمع بين المجرد والملموس ضمن أطر ثلاث (إطار المقادير، إطار عددي، إطار بياني). إنه بحق حقل مفاهيمي مركّب ممّا يسمح بتفسير تنظيم دراسته على مدار السنوات الأربع لمرحلة التعليم المتوسط على أنه إجراء لخفض التجريد من نمط "درجة تعقيد المفهوم للتفكير".

نقتصر في هذا المثال على ما يخص السنة الأولى من التعليم المتوسط فقط. أوصى المنهاج باقتراح وضعيات مستقاة من الحياة اليومية أو الواقع بحيث تمكّن المتعلّم من:

- التعرّف على وضعيات تناسبية أو وضعيات لا تناسبية في أمثلة بسيطة.
- إتمام جداول تناسبية في وضعيات بسيطة.
- لمس جوانب تطبيقية للتناسبية (النسبة المئوية، المقياس "التكبير أو التصغير" الخرائط مثلا، تحويل وحدات المقادير "الطول، المساحة، الحجم"، الزمن والسرعة).
- تصحيح تصور خاطئ "التكبير لا يعني الإضافة" (مربكة بروسو).
- اكتشاف واستخدام خواص التناسبية.
- تلخيص وتنظيم معطيات مرتبطة بالتناسبية في جداول وتمثيلها بمخططات.

كما لخصت الوثيقة المرافقة أنماط المشكلات التي ترتبط بموضوع التناسبية فيما يلي:

- التعرّف على وضعية تناسبية انطلاقا من معطيات عددية.
- البحث عن معطيات ناقصة في وضعية تناسبية، وكذا مقارنة نسب.
- الانتقال من إطار المقادير أو الإطار العددي إلى الإطار البياني والعكس.

خاتمة

تعرضنا في دراستنا هذه لمفهوم التجريد في الرياضيات عموما وفي منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط بالجزائر على وجه الخصوص. انصبّت جهودنا على رصد مكانة التجريد في المنهاج المذكور ووثيقته المرافقة وكيفية التعامل معه لأجل تيسير التعلّم خصوصا ما تعلّق ببرنامج السنة الأولى من التعليم المتوسط. ارتكزنا على الأفكار التي ينطوي عليها الإطار النظري المسمى "خفض التجريد".

كشف فحصنا ومحصنا للوثيقتين المذكورتين عن اعتبار القدرة على إجراء التجريد كفاءة ينبغي تنصيبها لدى المتعلّمين، وأن ذلك يمثّل إحدى أهمّ أهداف وغايات تدريس الرياضيات. لتنصيب هذه الكفاءة لدى متعلّمي السنة الأولى متوسط، بشكل خاص، عمل المنهاج ووثيقته المرافقة على اتخاذ مجموعة من التدابير والتوصيات لجعل المفاهيم والمهمّات الرياضياتية في متناولهم، أي بمستوى تجريد أقل، ممّا سمح لنا باستخلاص النتيجتين التاليتين:

- إنّ كلا من منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط ووثيقته المرافقة عمل على خفض مستوى تجريد المفاهيم والمهمّات الرياضياتية بشكل يزاوج بين تيسير تعلّمها وحفظ مكانة التجريد كغاية منشودة من تعلّم الرياضيات إلى حد مقبول.

- إنّ الشواهد التي مكّنتنا من التصريح بالنتيجة الأولى، تعبّر أيضا عن نجاعة إطار "خفض التجريد" كأداة لتحليل وتفسير الوثائق التربوية (المنهاج ووثيقته المرافقة تحديدا) ممّا يسمح بإعلان إمكانية توسيع نطاق استخدام هذه الأداة إلى مختلف عناصر القطب التربوي.

أخيرا وباعتبار الكتاب المدرسي الوثيقة الأقرب إلى المتعلّم والوسيلة الأكثر استخداما، فإننا نرى أنه من الوجاهة بمكان القيام بدراسة مماثلة للكتب المدرسية لمادة الرياضيات، وهو ما نأمل أن يكون موضوع دراسات مستقبلية.

المراجع

2.Aharoni, D. (1999). Undergraduate students' perception of data structures. *Unpublished Ph. D. thesis (in Hebrew). Technion, Israel Institute of Technology*.

3.Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In Epistemological foundations of mathematical experience (p. 160–202). Springer.

4.Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, *358*(1435), 1225–1230.

5.Frorer, P., Manes, M., & Hazzan, O. (1997). Revealing the faces of abstraction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*(3), 217–228.

6.Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(1), 71–90.

7.Hazzan, O. (2003). Reducing abstraction when learning computability theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *22*(2), 95–117.

8.Hazzan, O., & Zazkis, R. (2005). Reducing abstraction : The case of school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(1), 101–119.

9.Mitchelmore, M., & White, P. (2004). Abstraction in Mathematics and Mathematics Learning. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

10. Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings : Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.

11. Piaget, J., Mays, W., & Beth, E. W. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. D. Reidel.

12. Radford, L., Demers, S., & Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques*. Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.

13. Raychaudhuri, D. (2001). The tension and the balance between one mathematical concept and student constructions of it : Solution to a differential equation (PhD thesis). *Vancouver, Canada: Simon Fraser University*.

14. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36.

15. Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating : Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

16. Subedi, K. P. (2014). *Dealing With Abstraction : Reducing Abstraction in Teaching (RAiT)* [PhD Thesis]. Education: Faculty of Education.

17. Wilensky, U. (1991). *Abstract meditations on the concrete and concrete implications for mathematics education*. Epistemology and Learning Group, MIT Media Laboratory.

18. اللجنة الوطنية للمناهج. (2016). الوثيقة المرافقة لمنهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط. الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية، العاشور، الجزائر.

19. اللجنة الوطنية للمناهج. (2016). منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط. الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية، العاشور، الجزائر.