

RISQUE DE LONGEVITE ET TABLES DE MORTALITE PROSPECTIVES - MODELISATION LEE-CARTER

LONGEVITY RISK AND PERSPECTIVE MORTALITY TABLES - LEE-CARTER MODELING

Madadi Abdelkader ¹, Hamdani fouad ²,

- ¹ université djillali bounaama khemis miliana , (Algérie) madadikader@gmail.com
- ² Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée, (Algérie)
fouadhamdani9@gmail.com

Date de réception: 20/12/2018

Date d'acceptation: 07/10/2020

Date de publication: décembre/2020

Résumé

L'allongement de la durée de vie humaine observé ce dernier demi-siècle a donné naissance à un nouveau risque pour les caisses de retraite et les compagnies d'assurance sur la vie, appelé le risque de longévité. Cet article a pour objectif de construire une table de mortalité prospective spécifique à la population algérienne en utilisant le modèle de Lee-Carter, et la comparer à la table TV 97-99 actuellement utilisée pour la tarification. La comparaison a porté sur le prix de trois types de rentes viagères et a montré que la table TV 97-99 sous-estime fortement le coût d'un tel engagement. Par conséquent, il est dans l'intérêt des assureurs vie algériens de commencer à utiliser ces tables prospectives.

Mots-clés : risque de longévité ; table de mortalité prospective ; modèle de Lee-Carter ; rentes viagères.

Abstract

The lengthening of the human lifespan observed over the last half-century has given rise to a new risk for pension funds and life insurance companies, called longevity risk. This article aims to build a prospective mortality table specific to the Algerian population using the Lee-Carter model, and compare it to the 97-99 TV table, currently used for pricing. The comparison looked at the price of three types of life annuities and showed that the 97-99 TV table strongly underestimates the cost of such a commitment. As a result, it is of the Algerian life insurers' interest to start using these prospective tables.

Key words: longevity risk; prospective mortality table; Lee-Carter model; life annuities.

1. INTRODUCTION

Au cours du dernier demi-siècle, la durée de vie moyenne a progressé de plus de 20 ans dans le monde. En Algérie la progression est plus remarquable, l'espérance de vie à la naissance est passée de 46,1 ans en 1960 à 77,6ans en 2016 selon l'Office National des Statistiques (ONS), soit un gain moyen de 31 ans. Les progrès de la médecine et l'amélioration des conditions de vie sont les principaux facteurs qui expliquent cet allongement de la durée de vie.

Ce progrès spectaculaire a donné naissance à un nouveau risque pour les caisses de retraite et les compagnies d'assurance sur la vie, à savoir le risque de longévité.

Le risque de longévité correspond au risque financier associé au fait que les individus vivent en moyenne significativement plus longtemps que prévu, il trouve son origine dans l'inadéquation possible entre la table de mortalité et la survie réelle des assurés. Sa principale conséquence concerne le financement des retraites en Algérie. En effet, avec l'augmentation de l'effectif de la classe des retraités et une chute du taux de fécondité, passant de 7,52 en 1960 à 3,1 en 2016 selon l'ONS, les cotisations versées par la catégorie des actifs ne sont plus suffisantes.

La longévité présente également un danger pour les assureurs notamment lors de la tarification et le provisionnement des produits en assurance dont l'aléa est la durée de vie. En effet, elle implique que les prestations doivent être payées plus longtemps que la durée prévue initialement, augmentant ainsi l'engagement de l'assureur. Une mauvaise appréciation du risque de longévité peut induire des pertes énormes que ce soit pour les caisses de retraite ou les compagnies d'assurance.

Pour mieux cerner ce risque de longévité, on a recours à la construction des tables de mortalité prospectives qui prennent en compte l'évolution future de la mortalité. Ces tables donnent, pour chaque âge, la probabilité de décéder au cours d'une certaine année. Elles sont élaborées à partir des modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité passée et les extrapolant dans le futur. Parmi ces modèles, nous avons le modèle de Lee-Carter, retenu dans cette étude, jusque-là considéré comme une référence dans la modélisation de la longévité.

Au moment de la rédaction du présent article, la table TV 97-99, construite par le Conseil National des Assurance (CNA) sur la base des données de la population algérienne entre les années 1997 et 1999, servait de base réglementaire à la tarification en Algérie.

L'examen de cette table appelle deux remarques suivantes :

1. Il s'agit d'une table du moment, qui considère implicitement que la mortalité est figée dans le temps, alors qu'on a vu que la mortalité est en constante diminution.
2. Cette table a été construite il y a vingt ans et implique que les taux de mortalité sont largement supérieurs aux taux actuels. En effet, selon cette table le taux de mortalité infantile entre les âges 0 et 1 ans est de 50,6‰, alors qu'il est de 20,9 ‰ en 2016 selon l'ONS.

Les éléments développés précédemment plaide d'une part pour une actualisation de la table de mortalité algérienne, et la prise en compte des gains de longévité observé dans la population d'autre part. Ce constat établi, on peut considérer que seule une table de mortalité intégrant une optique prospective peut décrire de manière fiable l'évolution des facteurs biométriques de notre population.

Ainsi, notre problématique se propose d'examiner l'élaboration d'une table de mortalité prospective en utilisant le modèle de Lee-Carter, et mesurer son impact sur la tarification en la comparant à la table TV 97-99. Pour ce faire, on utilise une base de données constitués des différentes tables de mortalités de la population algérienne couvrant la période de 1977 à 2015 empruntées aux publications de l'ONS.

La suite de cet article est organisée comme suit : Section 2 décrit le modèle de Lee-Carter. Section 3 présente les données de l'étude. Dans la section 4 on applique le modèle de Lee-Carter. Section 5 examine l'extrapolation de la composante temporelle à l'aide de la méthodologie de Box-Jenkins. Section 6 consiste à une comparaison entre la table prospective et la table TV 97-99. Section 7 conclut en donnant des recommandations et de nouvelles pistes de recherche.

2. LE MODELE DE LEE-CARTER

Il s'agit d'une méthode statistique pour l'extrapolation des taux de mortalité, proposé pour la première fois par Lee et Carter (1992). Ce modèle, initialement utilisé sur des données américaines, définit la relation entre la mortalité, le temps et l'âge de la manière suivante :

$$\ln\mu_{x,t} = \alpha_x + \beta_x\kappa_t + \varepsilon_{x,t}$$

Avec : \ln est le logarithme népérien, $\mu_{x,t}$ le taux instantané de mortalité¹ à l'âge x au cours de l'année t , le paramètre α_x s'interprète comme la valeur moyenne des $\ln\mu_{x,t}$ pour l'âge x au cours du temps, $\beta_x\kappa_t$ représente la dynamique temporelle, la composante temporelle κ_t décrit l'évolution de la mortalité au cours du temps, β_x décrit la sensibilité des taux instantanés de mortalité à l'âge x par rapport à l'évolution générale κ_t et $\varepsilon_{x,t}$ est le terme d'erreur et correspond à ce qui n'a pu être expliqué par le modèle.

L'idée ici est de modéliser directement les taux instantanés de mortalité en les décomposant en une composante propre à l'âge (α_x) et en une composante mixte ($\beta_x\kappa_t$) décrivant l'évolution temporelle du taux de mortalité propre à cet âge.

Tel quel, ce modèle n'est pas identifiable. Car on peut trouver deux paramètres différents qui conduisent à la même valeur de la variable à expliquer. En effet, en prenant $\beta_x \leftarrow c\beta_x$ et $\kappa_t \leftarrow \kappa_t/c \forall c \in R^*$ ou $\alpha_x \leftarrow \alpha_x - c\beta_x$ et $\kappa_t \leftarrow \kappa_t + c \forall c \in R$ nous trouvons la même valeur $\ln\mu_{x,t}$. Pour le rendre identifiable, Lee et Carter (1992) ont proposé d'ajouter les contraintes suivantes :

$$\sum_t \kappa_t = 0 \quad \text{et} \quad \sum_x \beta_x = 1$$

Puisque le model proposé ne peut pas être résolu en utilisant les méthodes de régressions usuelles, car il n'y a pas des variables explicatives dans le côté droit du model. On estime α_x en appliquant la formule $\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_{max}-t_{min}+1} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \ln \mu_{x,t}$. Et afin d'estimer β_x et κ_t on utilise la décomposition en valeurs singulières (SVD) pour trouver les solutions au sens des moindres carrés ordinaires de la matrice $\ln \mu_{x,t} - \hat{\alpha}_x$.

Le principal avantage de ce modèle réside dans le fait que la modélisation proposée réduit la prévision des taux de mortalité futurs à l'étude de la série chronologique univariée κ_t .

3. LES DONNEES

Les données de l'étude sont des tables de mortalité abrégées, par groupes d'âge de 5 ans, et qui concernent la population féminine et masculine. Ces données sont obtenues à partir du site internet de l'ONS² et couvrent la période 1977-2015. Il est à noter que les tables de mortalité pour les années 1979, 1984, 1986, 1988, 1990, 1992 et 1997 n'existent pas.

Deux problèmes se posent avec ces données, le premier concerne le fait que pour construire la table de mortalité prospective nous avons besoin des tables de mortalité complètes, c'est-à-dire dont les quotients de mortalité sont annuels, et le second est lié au manque des tables pour certaines années.

Afin de pallier ces obstacles et construire ainsi notre base de données nous avons appliqué les transformations suivantes : pour transformer les tables abrégées en tables complètes nous avons appliqué le modèle de Heligman et Polard (1980), qui est un modèle d'ajustement des taux de mortalité, en utilisant le logiciel MORTPACK³. En ce qui concerne le manque des tables de mortalité pour certaines années, nous avons jugé raisonnable d'appliquer une interpolation linéaire à cause de la tendance temporelle apparente observée pour tous les âges.

4. L'APPLICATION DU MODELE DE LEE-CARTER

Afin d'estimer les paramètres du modèle, les données sont mises en forme d'une matrice, dont les lignes représentent l'âge (allant de 50 à 80 ans), les colonnes représentent l'année d'observation (allant de 1977 à 2015) et les cellules représentent le taux instantané de mortalité.

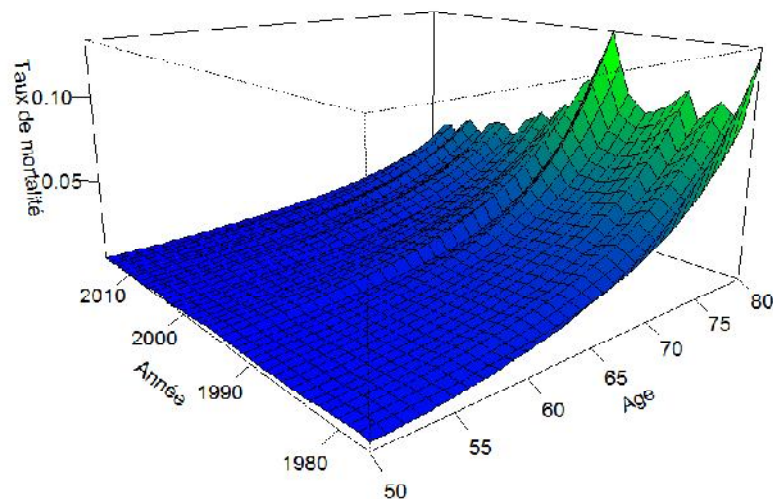
Nous avons décidé de retenir les âges compris entre 50 et 80 ans car notre étude est concernée par les rentes viagères, ce type de contrats est généralement souscrit par les individus partant à la retraite. Aussi, la prise en compte de tous les âges est de nature à influencer l'estimation des paramètres de modèle (mortalité infantile, bosse accident). D'autre part, et Puisque la mortalité des femmes est différente de celle des hommes, les femmes vivent généralement plus longtemps, nous allons construire deux tables prospectives, une spécifique aux femmes et l'autre aux hommes.

Pour aller des quotients de mortalité à des taux instantanés de mortalité on applique la transformation suivante : $\mu_{x,t} = -\ln(1 - q_{x,t})$.

La figure I représente la surface de mortalité pour les femmes, celle des hommes a presque la même structure. Ce graphe met en évidence l'observation qu'on a fait à l'introduction, c'est-à-dire la tendance à la baisse des taux de mortalité. On s'aperçoit aussi un pic de la mortalité dans les années 1990 causé par la décennie noire, qui a entraîné malheureusement un grand nombre de décès.

Nous présenterons maintenant les résultats d'estimation de paramètres du modèle de Lee-Carter. Il est à noter que pour l'estimation nous avons utilisé les packages *demography* de Rob J Hyndman et *ilc* de Zoltan Butt, Steven Haberman et Han Lin Shang sur le logiciel R.

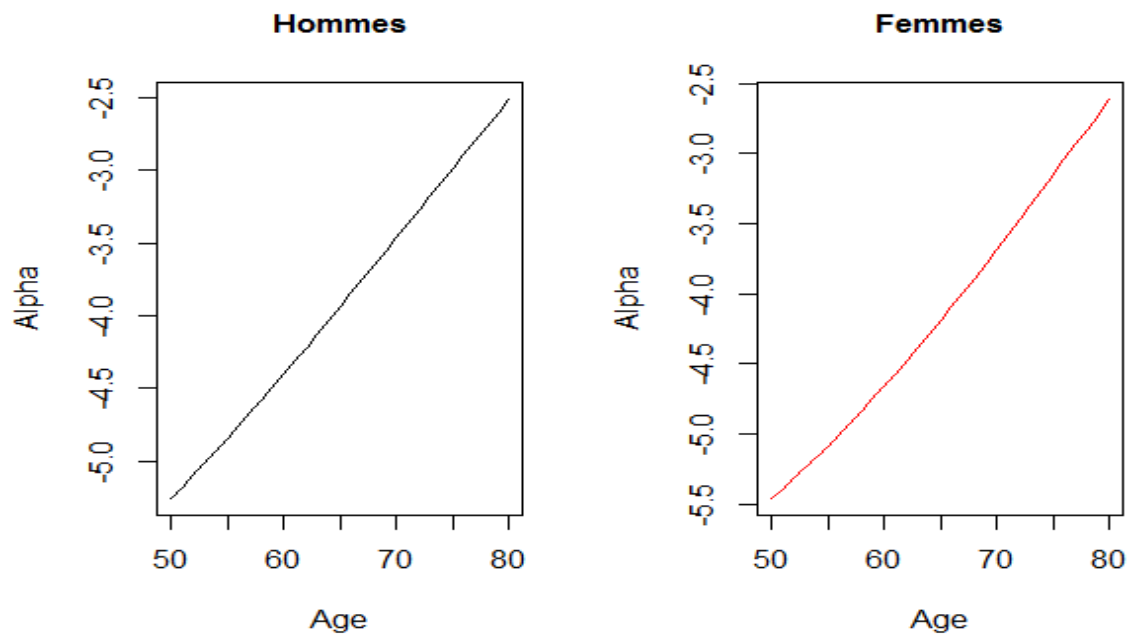
Figure I : La surface de mortalité selon l'âge et l'année pour les femmes.



Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

La figure II présente le résultat d'estimation de paramètre α_x . On constate que les α_x augmentent de façon linéaire avec l'âge.

Figure II : Résultat d'estimation des α_x du modèle de Lee-Carter pour les hommes et les femmes.



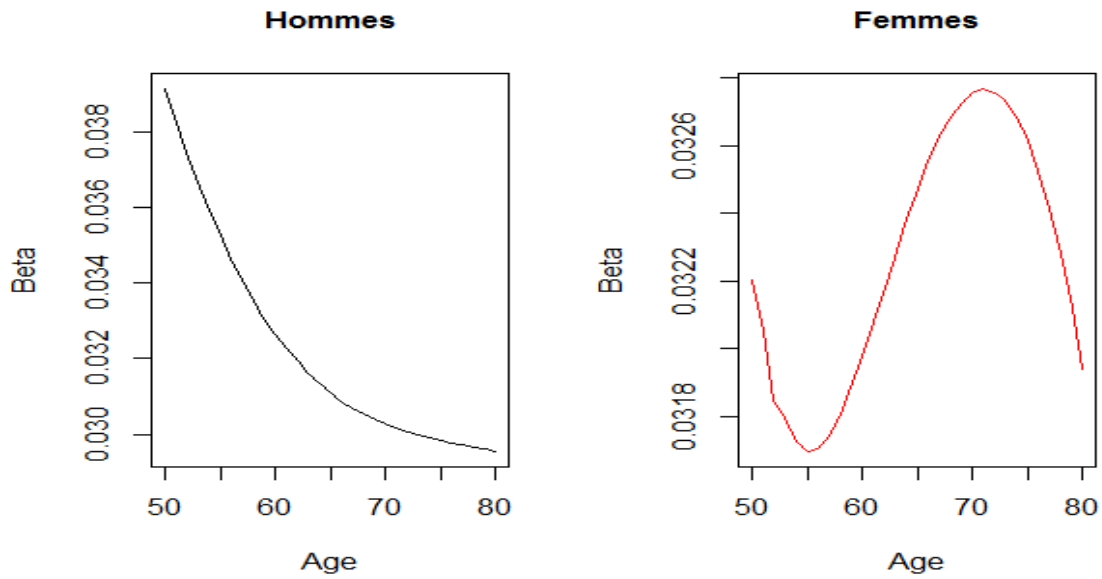
Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

La figure III présente le résultat d'estimation de paramètre β_x . On s'aperçoit que la sensibilité des taux instantanés de mortalité à l'âge x par rapport à l'évolution générale de la mortalité n'est pas identique pour tous les âges. En effet, les âges les plus élevés sont beaucoup moins sensibles à la chute temporelle de la mortalité.

La figure IV présente le résultat d'estimation de paramètre κ_t . On constate que les κ_t sont décroissants dans le temps, cette tendance à la baisse est approximativement linéaire, reflétant le progrès de la durée de vie humaine observée ce dernier demi-siècle.

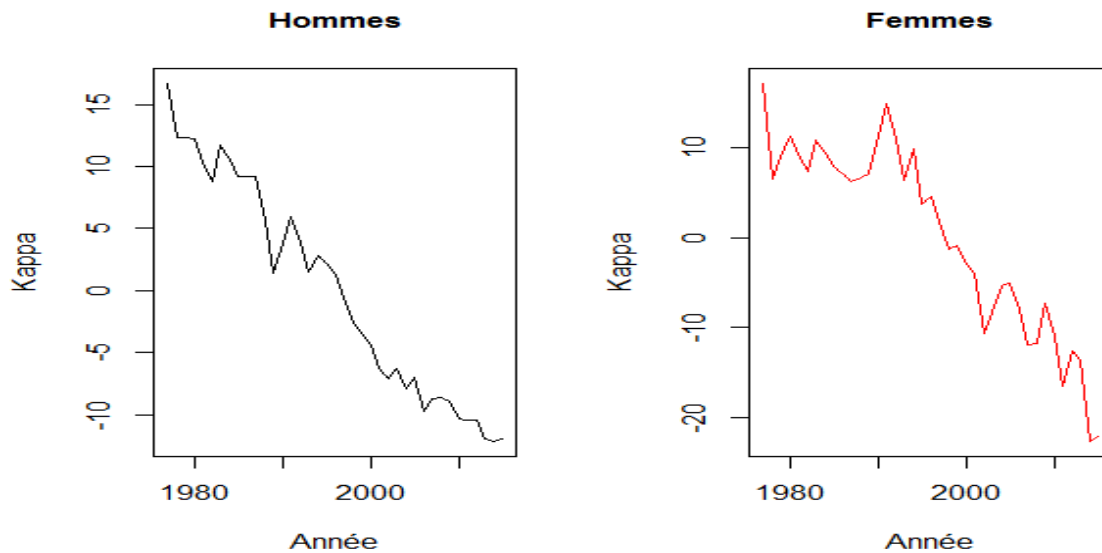
Il est utile de remarquer qu'on n'aurait pas obtenu les mêmes estimations si on avait travaillé avec tous les âges plutôt qu'avec les plus de 50 ans, comme la figure V montre. On peut maintenant s'apercevoir la baisse de la mortalité entre l'âge de 0 à 10 ans et la bosse d'accident⁴(Alpha).

Figure III : Résultat d'estimation des β_x du modèle Lee-Carter pour les hommes et les femmes.



Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

Figure IV : Résultat d'estimation des κ_t du modèle de Lee Carter pour les hommes et les femmes.



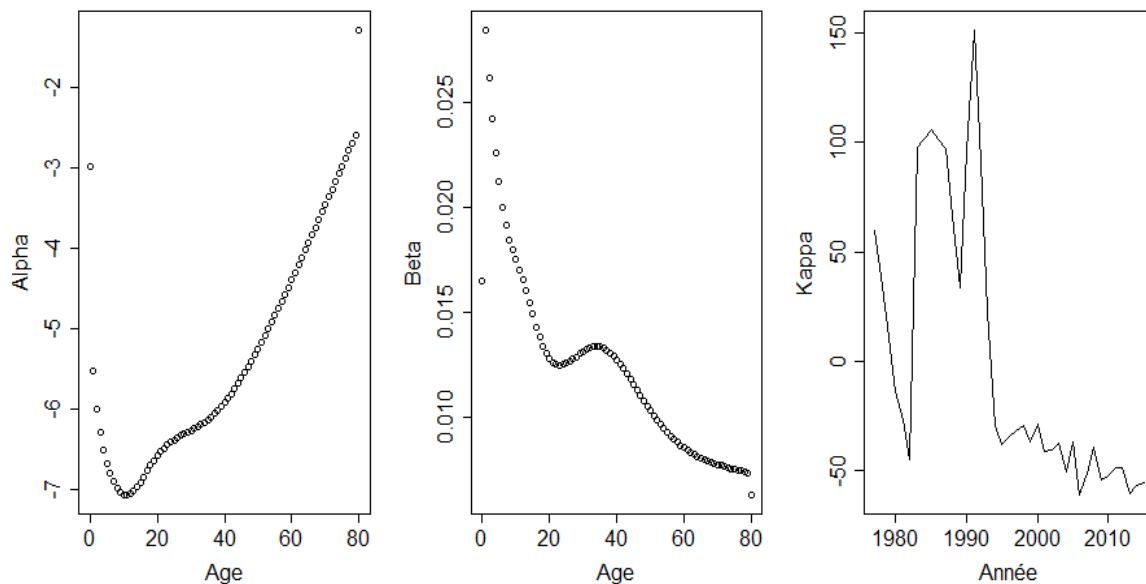
Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

Puisque les paramètres estimés ne permettent pas de reproduire le nombre exact de décès, nous allons procéder au réajustement des κ_t en utilisant la méthode de Newton-Raphson⁵ de façon que la différence entre le nombre de décès observé d'une année donnée et le nombre estimé à l'aide de notre modèle soit nulle. Figure VI présente le résultat de réajustement. On constate que l'ajustement nous a permis d'avoir des courbes κ_t plus lissées. Les α_x et β_x sont ceux de la première estimation.

5. L'EXTRAPOLATION DE LA COMPOSANTE TEMPORELLE

Le modèle de Lee-Carter possède la propriété de synthétiser dans la série κ_t toute l'information relative à l'évolution de la mortalité dans le temps. Donc et afin de prévoir la mortalité future et par la suite construire les tables de mortalité prospectives, il suffit d'extrapoler les tendances observées dans le passé de cette série temporelle. Pour pouvoir faire cela, nous allons utiliser la méthodologie de Box-Jenkins. La suite de cette section présente le résultat d'application de cette méthodologie sur la série κ_t homme, puisque le cas des femmes est identique.

Figure V : Résultat d'estimation des paramètres du modèle de Lee-Carter dans la tranche d'âge 0-80 ans pour les hommes.

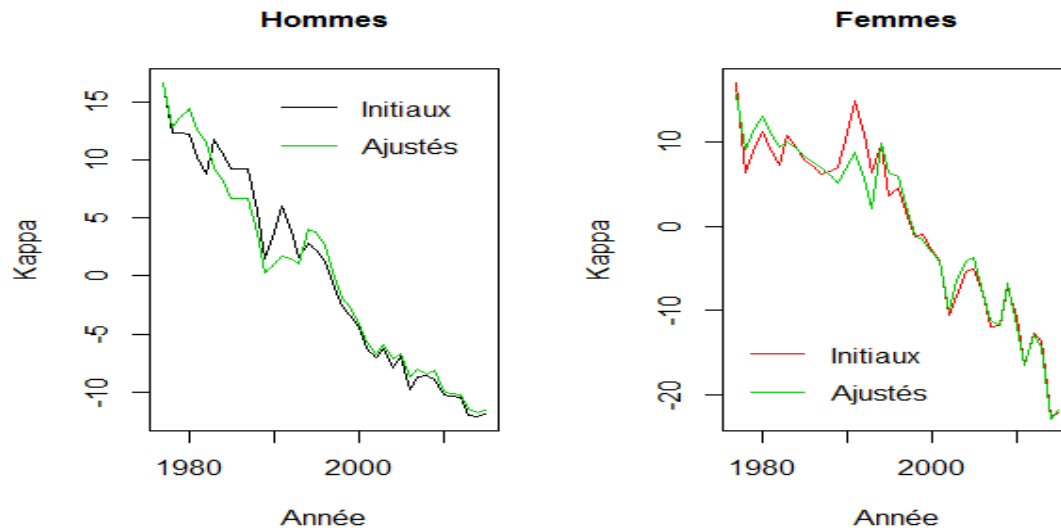


Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

D'après le test de Dickey-Fuller augmenté la série κ_t est de type TS (*trend stationary*), tendance significative au seuil de 1%. Ainsi et pour rendre κ_t stationnaire on doit procéder à l'élimination de la tendance. La figure VII présente le résultat de la transformation.

Maintenant que la série est devenue stationnaire, on procède à l'examen des corrélogrammes simple et partiel afin de déterminer l'ordre du processus ARMA. La figure VIII présente les deux corrélogrammes.

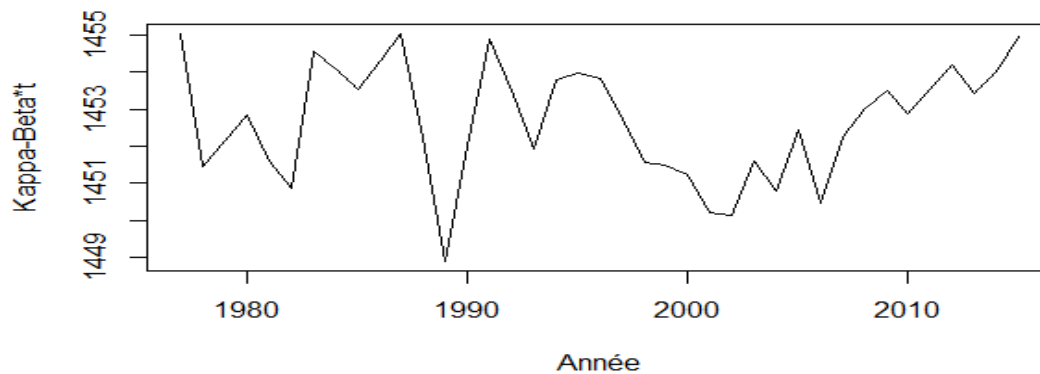
Figure VI : Comparaison entre les κ_t initiaux et les κ_t ajustés.



Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

On constate deux pics significatifs, l'un est dans le corrélogramme simple et l'autre dans le corrélogramme partiel, ce qui implique que notre série peut être modélisée à l'aide de trois processus ARMA différents. Pour déterminer lequel est le meilleur, on se base sur les critères AIC et BIC donnés dans le tableau I.

Figure VII : La composante κ_t après l'élimination de la tendance (*detrending*).



Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

Figure VIII : Les corrélogrammes simple et partiel de la série κ_t après l'élimination de la tendance.

Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

Tableau I : Les valeurs des critères AIC et BIC pour les trois processus ARMA.

Modèle	AIC	BIC
AR (1)	141,37	146,36
MA (1)	139,26	144,25
ARMA (1,1)	141,03	147,68

Source : Calculé par l'auteur.

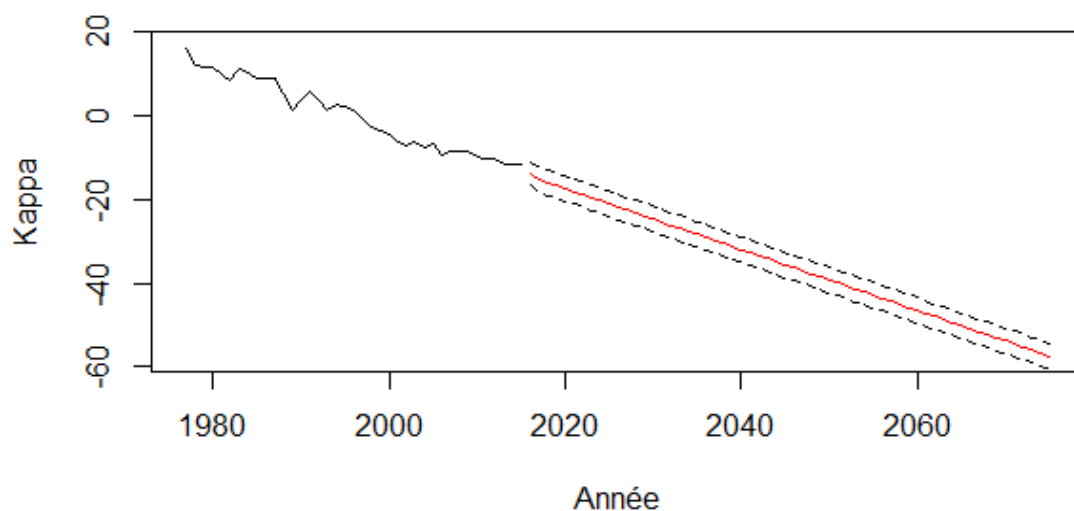
Puisque le modèle MA (1) avec dérive possède les critères AIC et BIC les plus faibles, il est le meilleur modèle. Mais avant de l'utiliser pour modéliser notre série κ_t , il est intéressant de le comparer à la marche aléatoire avec dérive, qui est le modèle standard pour extrapoler la série κ_t . La marche aléatoire a un AIC =147,07 et un BIC = 150,34 donc notre modèle est bien meilleur.

La figure IX présente le résultat d'extrapolation de la série κ_t , tendance ajoutée, à un horizon de 60 ans en utilisant le modèle MA (1). Il est à noter cependant qu'au-delà de la moitié de la période d'observation la prévision perd considérablement en fiabilité. Toutefois, une telle projection est nécessaire pour calculer le montant des rentes pour les plus jeunes assurés.

On constate que la tendance à la baisse de la série κ_t se continuer dans le futur. Indiquant une diminution davantage des taux de mortalité.

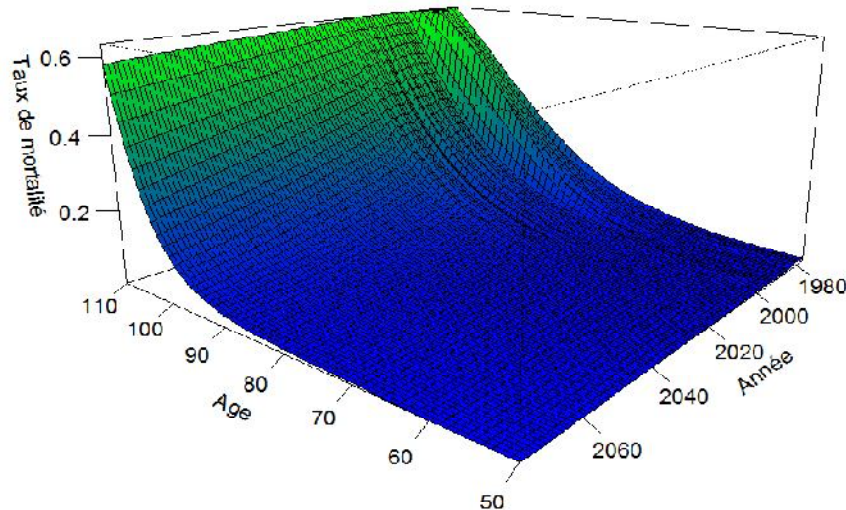
La figure X représente le résultat de construction de la table de mortalité prospective spécifique à la population masculine, après l'avoir fermé en utilisant le modèle de Coale et Kisker⁶ pour atteindre l'âge de 110 ans⁷. Celle de la population féminine possède la même structure. On constate que notre projection a conservé la tendance à la baisse des taux de mortalité observée tout au long du dernier demi-siècle.

Figure IX : La prévision de la série κ_t avec un intervalle de confiance de 95%.



Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

Figure X : Surface de mortalité de la population masculine après la construction de la table prospective.



Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

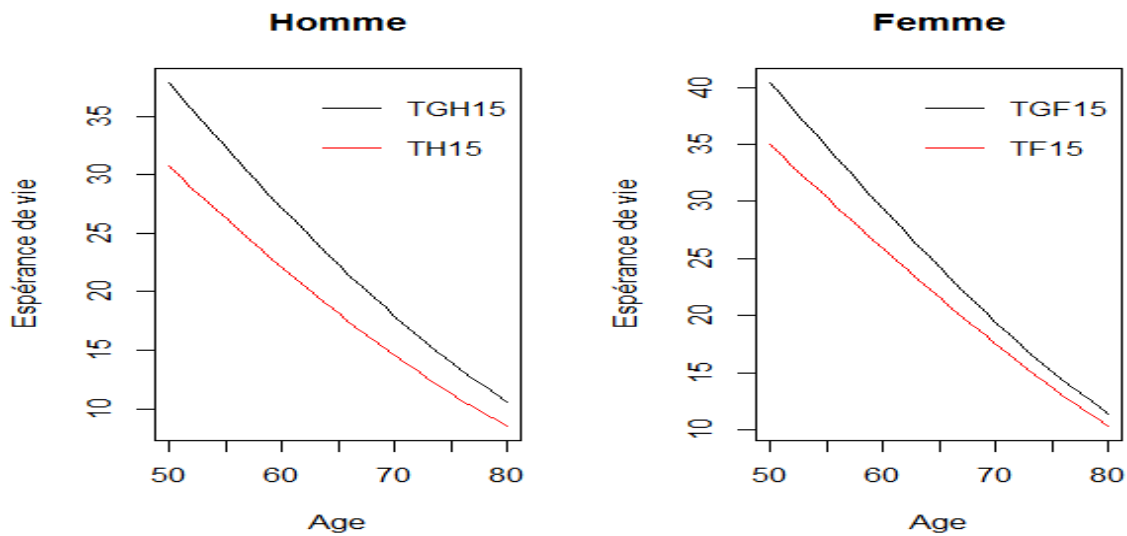
6. COMPARAISON ENTRE LES TABLES PROSPECTIVES ET LA TABLE TV 97-99

Pour apprécier l'impact des tables construites sur la tarification en assurance vie, nous allons les comparer à la table TV 97-99, actuellement utilisée pour la tarification. Mais avant de passer aux calculs actuariels, il est intéressant d'examiner la différence qui existe entre l'espérance de vie issue d'une table du moment, appelée aussi table statique, et d'une table prospective par génération⁸.

Dans la suite on notera TGH15 pour signifier la table générationnelle homme et TGF15 pour la table générationnelle femme, construites à l'aide de notre projection. TH15 et TF15 pour signifier respectivement les tables du moment homme et femme, construites par l'ONS en 2015.

La figure XI représente la différence de l'espérance de vie à l'âge de 50 jusqu'à 80 ans, calculées en prenant l'année 2015 comme référence. On constate que les espérances de vie calculées à partir des tables générationnelles sont supérieures, pour tous les âges, à celles des tables statiques. Ce qui est attendu, puisque ces tables permettent d'intégrer les évolutions potentielles de la mortalité, donc sont plus réalistes, contrairement aux tables statiques qui supposent que le niveau de mortalité observé en 2015 prévaudra dans le futur. Si on prend, par exemple, un homme âgé de 60 ans en 2015, selon la table TH15 (statique) cet homme est espéré de vivre, en moyen, 22 ans. Alors que selon la table TGH15 cet homme, qui fait partie de la génération 1955, est espéré de vivre, en moyen, 27 ans, soit une différence de 5 ans.

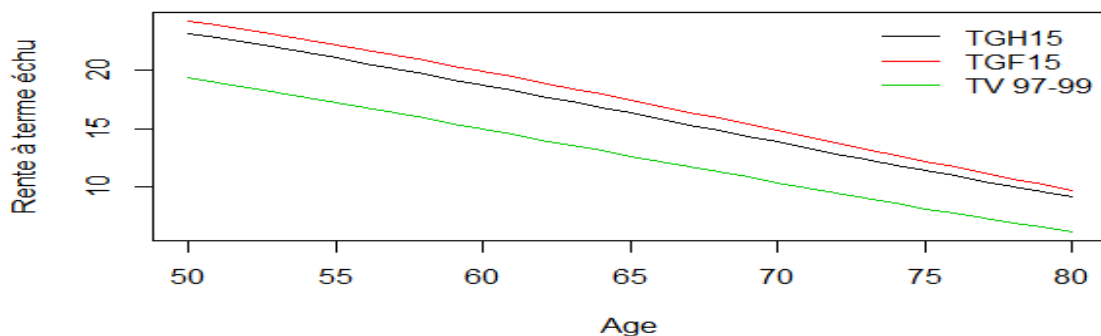
Figure XI : Comparaison entre l'espérance de vie issue d'une table statique et d'une table générationnelle.



Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

En prenant toujours l'année 2015 comme référence, la figure XII présente la différence de prix d'une rente viagère à terme échu⁹, d'un montant de 1 DA et au taux d'intérêt technique de 2,75%, simulée entre les âges de 50 à 80 ans. On constate que la table TV 97-99 sous-estime fortement le coût d'un tel engagement. En effet, une femme âgée de 65 paie selon cette table 12 DA pour obtenir une telle couverture, alors que, le coût réel est de 17 DA (si la mortalité évolue de la même façon que dans le passé), soit une perte de 5 DA pour chaque contrat de 1 DA ; une perte énorme qui peut avoir des conséquences graves sur la solvabilité de l'assureur. On a trouvé des résultats similaires aux cas d'une rente viagère différée et temporaire.

Figure XII : Comparaison de prix des rentes viagères à terme échu en 2015.



Source : réalisé à partir des données de l'ONS en utilisant le logiciel R.

7. CONCLUSION

L'objectif principal poursuivi par ce travail a consisté à élaborer une table de mortalité prospective spécifique à la population algérienne en utilisant le modèle de Lee-Carter, et la comparer à la table TV 97-99 actuellement utilisée pour la tarification en assurance vie.

Les résultats montrent clairement que la table TV 97-99, en fait tout es les tables statiques, surestiment la mortalité, et donc sous-estiment la longévité, réelle d'une génération donnée. Contrairement aux tables prospectives qui prennent en compte le phénomène d'allongement de la durée de vie humaine. Par conséquent, il semble que les assureurs-vie algériens ont intérêt à commencer à utiliser ces tables pour la tarification et le provisionnement des produits d'assurance en cas de vie tels que les rentes viagères, afin de mieux gérer le risque de longévité inhérent à leur portefeuille.

A la fin, la problématique de la longévité reste vaste et riche en pistes de recherches. Nous pouvons par exemple incorporer à notre analyse le modèle de Renshaw-Haberman qui intègre l'effet de cohorte, ou bien construire des tables de mortalité prospectives spécifiques à la population des rentiers, puisque ces derniers sont différents de ceux de la population générale du fait de l'effet de sélection, c'est-à-dire la rente essentiellement attire les individus qui pensent vivre le plus longtemps.

Référence:

- 1 -Le taux instantané de mortalité est défini comme la probabilité de décéder dans un intervalle de temps très petit $[t, t + \Delta t]$.
- 2-<http://www.ons.dz/-Demographies-.html>
- 3-MORTPACK est un logiciel des Nations Unies pour la mesure de la mortalité, lien de téléchargement
<http://www.un.org/en/development/desa/population/publications/mortality/mortpak.shtml>
- 4- La bosse des accidents se traduit par des taux de mortalité particulièrement élevés entre les âges de 20 à 30 ans à cause du risque accru de morts violentes (accidents de voiture).
- 5- La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative qui consiste à trouver une solution approximative à l'équation $f(x) = 0$.
- 6-Le modèle de Coale et Kisker est un modèle d'extrapolation de la mortalité aux grands âges.
- 7- On a pris cette mesure puisque les tables de mortalité de l'ONS s'arrêtent à l'âge de 80 ans, alors que le nombre de personnes vivant jusqu'à 100 ans continue d'augmenter.
- 8- On utilise le terme table prospective par génération parce que Les tables prospectives peuvent être présentées par génération (année de naissance) ou par année calendaire. Toutefois, pour la tarification on a besoin des tables générationnelles puisque on tarife par rapport à l'année de naissance de l'assuré.
- 9- On appelle rente viagère à terme échu une assurance qui garantit à un assuré d'âge x lors de la signature du contrat ($t = 0$) le paiement d'une unité monétaire à la fin de chaque année à la condition qu'il soit en vie.