ETUDE VARIATIONNELLE DU CONTACT AVEC FROTTEMENT ENTRE UN CORPS ELASTIQUE ET UNE FONDATION RIGIDE

Résumé

Le but de ce travail est l'étude variationnelle du contact avec frottement entre un corps élastique et une fondation rigide. La loi de comportement de ce corps est non linéaire et la loi de frottement est celle de Tresca en sa version statique. Ce travail est divisé en trois parties. La première est destinée à définir quelques outils de l'analyse fonctionnelle. La seconde est consacrée aux résultats d'existence et d'unicité de la solution. La troisième est réservée à l'étude de quelques propriétés de la solution.

La différence entre ce travail et celui de Rochdi et al. [1], réside dans l'introduction d'un paramètre dans la loi constitutive et la dépendance de la solution par rapport à ce paramètre.

Mots clés: *élasticité, contact, frottement, opérateur fortement monotone, pénalisation.*

Abstract

The purpose of this work is the study varitional of contact with friction between an elastic body and a rigid fondation. The elastic constitutive law is non linear. This work is divided in three parts. The first is destined to define some tools of functional analysis. The second is devoted existence and uniqueness results of the solution. The third is reserved to study some properties of the solution.

The difference between this work and that in Rochdi et al. [1], reside in introduction of a parameter in constitutive law and dependance of the solution relatively at this parameter.

Key words : *elasticity, contact, friction, strongly monotone operator, penalization.*

B. TENIOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Université Mentouri
Constantine (Algérie)

ملخص

إن الهدف من هذا العمل هو الدراسة التغيرية لاحتكاك جسم مرن بقاعدة صلبة، مع العلم أن قانون استجابة هذا الجسم المرن غير خطي وأن الاحتكاك يخضع لقاون Tresca في صيغته الساكنة.

ينقسم هذا العمل إلى ثلاثة أجزاء. الجزء الاول يعرف بعض أدوات التحليل الدالي و الجزء الثاني يتطرق إلى نظريات الوحدانية و الوجود، أما الجزء الثالث فإنه يتطرق الى بعض الخصائص المتعلقة بالحل.

إن الفرق بين هدا العمل المقدم و ذلك المذكور في [5] يمكن في اذخال وسيط في قانون الإستجابة و ارتباط الحل بهذا الوسيط.

الكلمات الفاتحة: *المرونة، التلامس، الإحتكاك، مؤثر رتيب بقوة.*

1. DEFINITIONS ET NOTATIONS

On note par :

Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, 3)$.

Γ la frontière de Ω.

Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ une partie de Γ.

S_N l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^N$.

$$H = \{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1,N}\} = L^2(\Omega)^N$$

$$\mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i,j = \overline{1,N}\} = L^2(\Omega)_s^{N\times N}$$

$$H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} = H^1(\Omega)^N$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \ / Div\sigma \in H\}$$

Ces espaces munis de leurs produits scalaires définis par:

$$\langle u,v\rangle_H = \int_\Omega u_i v_i dx \quad \forall u,v \in H$$

$$\langle \sigma,\tau\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \quad \forall \sigma,\tau \in \mathcal{H}$$

$$\langle u,v\rangle_{H_1} = \langle u,v\rangle_H + \langle \varepsilon(u),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \ \forall u,v \in H$$

$$\langle \sigma,\tau\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma,\tau\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, Div\tau\rangle_H \quad \forall \sigma,\tau \in \mathcal{H}_1$$

sont des espaces de Hilbert. Les normes associées à ces produits scalaires seront notées par $|.|_H, |.|_{\mathcal{H}}, \ |.|_{H_1}, |.|_{\mathcal{H}_1}$

On définit respectivement l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ et l'opérateur divergence $Div : \mathcal{H}_1 \to H$ par:

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j), \ Div\sigma = (\partial_j \sigma_{ij})$$

L'application $\gamma: H_1 \to L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité:

$$\gamma u = u|_\Gamma \qquad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})^N$$

est dite application trace. L'image de H_1 par cette application est notée $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$. Soit H'_Γ le dual de H_Γ, alors pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$ on a :

$$\langle \sigma\nu, \gamma v\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + \rangle Div\sigma, v\langle_H \; \forall v \in H_1$$

et si $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N\times N} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})\}$, alors:

$$\langle \sigma\nu, \gamma v\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu v ds \qquad \forall v \in H_1$$

Dans le problème qu'on va étudier $mes\Gamma_1 > 0$, alors l'inégalité de Korn:

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C|u|_{H_1} \quad \forall u \in V$$

est vérifiée, où C est une constante strictement positive qui dépend de Ω et Γ_1 et l'espace V défini par:

$$V = \{u \in H_1 \,/\, u = 0 \;\; sur\; \Gamma_1,\; u_\nu = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_3\}$$

est un sous-espace fermé de H_1.

2. RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE

2.1. Formulation du problème mécanique et hypothèses

On considère un corps élastique dont les particules matérielles occupent un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ (N = 1, 2, 3) et dont la frontière Γ, supposée suffisamment régulière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que mesure $\Gamma_1 > 0$. On suppose que le champ des déplacements u s'annule sur Γ_1, que des tractions superficielles h s'appliquent sur Γ_2 et que des forces volumiques f agissent sur Ω. Sur Γ_3, le corps Ω est en contact bilatéral avec une fondation rigide; le contact est avec frottement et modélisé par la loi de Tresca en sa version statique. On précise encore que le corps Ω a une loi de comportement de la forme $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$ (où θ est un paramètre qui peut être la température, l'humidité, l'intensité du champ magnétique, l'état d'endommagement du matériau ou tout autre effet qui peut influencer les coefficients dans la loi de comportement).

La présence de la température dans les lois de comportement en tant que paramètre est une hypothèse simplificatrice utilisée par Ionescu et Sofonea [2], Sofonea [3], Cristescu et Suliciu [4], Duvaut et Lions [5], Blanchard [6]. Sous ces hypothèses, le problème de frottement qu'on va étudier peut se formuler de la manière suivante :

Problème P. Trouver le champ des déplacements $u: \Omega \to \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma: \Omega \to S_N$ tels que:

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \quad \text{dans } \Omega \tag{2.1}$$

$$Div\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \tag{2.3}$$

$$\sigma\nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_\nu = 0, \qquad |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \;\Rightarrow u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \exists\lambda \geq 0 \;\; tel\; que \quad \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array}\right\} \text{sur } \Gamma_3 \tag{2.5}$$

Hypothèses.
Pour l'étude du problème mécanique *(P)*, on considère les hypothèses suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} F: \Omega \times S_N \times \mathbb{R}^M \to S_N \text{ est une application telle que:} \\ \text{(a) } \exists m > 0 \text{ tel que:} \\ (F(x,\varepsilon_1,\theta) - F(x,\varepsilon_2,\theta)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \quad \forall\theta \in \mathbb{R}^M. \\ \text{(b) } \exists L_1, L_2 > 0 \text{ telles que:} \\ |F(x,\varepsilon_1,\theta_1) - F(x,\varepsilon_2,\theta_2)| \leq L_1|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + L_2|\theta_1 - \theta_2|. \\ \text{(c) La fonction } x \to F(x,\varepsilon,\theta) \text{ est mesurable Lebesgue} \\ \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall\varepsilon \in S_N \quad \forall\theta \in \mathbb{R}^M. \\ \text{(d) } F(x, 0_N, 0_M) = 0_N \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

$$f \in H, \quad h \in L^2(\Gamma_2)^N \tag{2.7}$$

$$\theta \in L^2(\Omega)^M \tag{2.8}$$

$$g \geq 0 \tag{2.9}$$

Remarque 1. les hypothèses (2.6) nous permettent de considérer l'opérateur $\widetilde{F}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ défini par:

$$\widetilde{F}(\varepsilon,\theta)(x) = F(x, \varepsilon(x), \theta(x)) \quad \text{p.p.}\, x \in \Omega \quad \forall\varepsilon \in \mathcal{H}.$$

Par simplicité, on note dans la suite cet opérateur par F. Comme l'opérateur F est fortement monotone et de Lipschitz, il résulte donc que F est inversible et son inverse $F^{-1}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'est aussi [7].

On munit l'espace V du produit scalaire suivant :

$$\langle u, v\rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \tag{2.10}$$

Grâce à l'inégalité de Korn, on peut vérifier facilement que les normes $|.|_V$ et $|.|_{H_1}$ sont équivalentes sur V.

De (2.7) et du théorème de Riesz-Fréchet, il résulte l'existence d'un élément unique $\eta \in V$ tel que :

$$\langle \eta, v\rangle_V = \langle f, v\rangle_H + \langle h, \gamma v\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V \tag{2.11}$$

En outre, on définit aussi la fonctionnelle $j: V \to \mathbb{R}_+$ par:

$$j(v) = g\int_{\Gamma_3} |v_\tau| ds \quad \forall v \in V \tag{2.12}$$

et l'ensemble des "contraintes admissibles " suivant:

$$\Sigma_{ab} = \{\tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v\rangle_V \quad \forall v \in V\} \tag{2.13}$$

2.2. Formulations variationnelles

Dans cette partie, on va donner deux formulations variationnelles du problème mécanique *(P)*. Dans la première formulation, l'inconnue principale est le champ des déplacements u, alors que dans la seconde formulation, l'inconnue principale est le champ des contraintes σ. Le résultat conduisant à ces deux formulations est le suivant :

Lemme 1. Sous les hypothèses (2.6) - (2.9), si (u,σ) est une solution du problème *(P)*, alors on a :

$$u \in V,\ \langle F(\varepsilon(u),\theta,\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v-u \rangle_V \quad \forall v \in V \qquad (2.14)$$

$$\sigma \in \Sigma_{ab},\ \langle F^{-1}(\sigma,\theta),\tau-\sigma\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \forall \tau \in \Sigma_{ad} \qquad (2.15)$$

Démonstration : La démonstration de ce lemme est basée sur l'application de la formule de Green, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'utilisation de la loi de comportement et d'équilibre ainsi que les conditions aux limites du problème P et la définition de l'ensemble Σ_{ad} [1]. Le lemme précédent nous permet de donner les deux formulations variationnelles suivantes pour le problème mécanique P:

Problème $\mathbf{P_1}$. Trouver le champ des déplacements $u: \Omega \to H_1$ tel que:

$$u \in V,\ \langle F(\varepsilon(u),\theta,\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v-u \rangle_V \quad \forall v \in V$$

Problème $\mathbf{P_2}$. Trouver le champ des contraintes $\sigma: \Omega \to \mathcal{H}_1$ tel que:

$$\sigma \in \Sigma_{ab},\ \langle F^{-1}(\sigma,\theta),\tau-\sigma\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}$$

2.3. Théorèmes d'existence et d'unicité

Pour l'existence et l'unicité des problèmes *(P_1)* et *(P_2)*, nous avons les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. Soit mesure $\Gamma_1 > 0$. Sous les hypothèses (2.6) - (2.9), le problème *(P_1)* admet une solution unique $u \in V$.

Démonstration : L'opérateur $A_\theta: V \to V$ défini par:

$$\langle A_\theta w, v\rangle_V = \langle F(\varepsilon(w),\theta),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v, w \in V$$

est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. En outre, la fonctionnelle j définie par (2.12) est une semi-norme continue sur V, alors le théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques de deuxième espèce [6], entraîne l'existence d'un élément unique u tel que:

$$u \in V,\ \langle F(\varepsilon(u),\theta,\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v-u \rangle_V \forall v \in V$$

D'où le théorème 1.

Théorème 2. Soit mesure $\Gamma_1 > 0$. Sous les hypothèses (2.6) - (2.9), le problème *(P_2)* admet une solution unique $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Démonstration : (i) Comme la fonctionnelle j est positive, en utilisant (2.10), on a:

$$\langle \varepsilon(\eta),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \varepsilon(\eta),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \eta, v\rangle_V \quad \forall v \in V$$

c'est-à-dire $\varepsilon(\eta) \in \Sigma_{ad}$, donc Σ_{ad} est non-vide de $\mathcal{H}$. Il est facile de voir que Σ_{ad} est un convexe fermé de $\mathcal{H}$.

(ii) L'opérateur $F: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est fortement monotone et de Lipschitz donc son inverse F^{-1} l'est aussi. Alors, le théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques de premières espèces [7], entraîne l'existence d'un élément unique $\sigma \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\sigma \in \Sigma_{ad},\ \langle F^{-1}(\sigma,\theta),\tau-\sigma\rangle \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}$$

Reste à montrer que $\sigma \in \mathcal{H}_1$. Nous avons déjà $\sigma \in \Sigma_{ad} \subset \mathcal{H}$ et $\langle \sigma,\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v\rangle_V \quad \forall v \in V$.

En posant : $v = \pm \varphi$ et $\varphi \in D(\Omega)^N$ dans cette dernière inégalité et en utilisant (2.11), il résulte que:

$$\langle \sigma,\varepsilon(\varphi)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \eta,\varphi\rangle_V = \langle f,\varphi\rangle_H + \langle h,\gamma\varphi\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} = \langle f,\varphi\rangle_H \ \forall \varphi \in D(\Omega)^N$$

D'où $Div\sigma = -f \in H$. Puisque $\sigma \in \mathcal{H}$, il résulte $\sigma \in \mathcal{H}_1$, ce qui achève la démonstration.

3. PROPRIETES DE LA SOLUTION

3.1. Un résultat d'équivalence

On va commencer cette section par un résultat faisant le lien entre les solutions respectives des problèmes variationnels *(P_1)* et *(P_2)*.

Théorème 3. Sous les hypothèses (2.6) - (2.9), soit *(u,σ)* un couple de fonctions telles que $u \in$ V et $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Alors, la vérification de deux parmi les trois assertions suivantes entraîne la troisième:

(i) u est la solution du problème *(P_1)* donnée par le théorème 1.

(ii) σ est la solution du problème *(P_2)* donnée par le théorème 2.

(iii) σ et u sont liées par la loi de comportement élastique:

$$\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$$

Démonstration : voir [1], p. 497.

Remarque 2.

Les interprétations du théorème 3 sont les suivantes :

1)- Si le champ des déplacements u est solution du problème variationnel *(P_1)*, alors le champ des contraintes σ associé à u par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$ est solution du problème *(P_2)*.

2)- Si le champ des contraintes σ est solution du problème variationnel *(P_2)*, alors le champ des déplacements u associé σ par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$ est solution du problème *(P_1)*.

3)- Si le champ des déplacements u est solution du problème variationnel *(P_1)*, le champ des contraintes σ est solution du problème variationnel *(P_2)*, alors u et σ sont liés par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$.

3.2. Dépendance de la solution par rapport au paramètre

Dans cette partie on va étudier la dépendance de la solution du problème *(*P*)* par rapport au paramètre θ.

Théorème 4. Sous les hypothèses (2.6) - (2.7) et (2.9), soit *(u_i,σ_i)* la solution variationnelle du problème *(P)* associée au paramètre θ_i *(i = 1, 2)* telle que (2.8) soit vérifiée. Alors, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω, Γ_1 et F telle que:

$$|u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C|\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^M}$$

Démonstration. Soit $(u_i\ ,\ \sigma_i)$ solution faible du problème (P) et $\theta_i \in L^2(\Omega)^M$ $(i = 1, 2)$. Alors on a :

$$\langle F(\varepsilon(u_1),\theta_1,\varepsilon(v)-\varepsilon(u_1)\rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q,v-u_1\rangle_V \quad \forall v \in V \quad (3.1)$$

$$\langle F(\varepsilon(u_2),\theta_2,\varepsilon(v)-\varepsilon(u_2)\rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q,v-u_2\rangle_V \quad \forall v \in V \quad (3.2)$$

En prenant $v = u_2$ dans (3.1) et $v = u_1$ dans (3.2), il vient :

$$\langle F(\varepsilon(u_1),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_2),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

Donc :

$$\langle F(\varepsilon(u_1),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_1),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\rangle_{\mathcal{H}} +$$

$$\langle F(\varepsilon(u_2),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_2),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

De l'inégalité précédente, il résulte:

$$|\langle F(\varepsilon(u_2),\theta_1)-F(\varepsilon(u_1),\theta_1),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\rangle_{\mathcal{H}}| \leq$$

$$|\langle F(\varepsilon(u_2),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_2),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\rangle_{\mathcal{H}}|$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.6) dans le membre droit de cette dernière inégalité puis (2.6) et l'inégalité de Korn dans son membre gauche, on obtient :

$$Cm|u_1-u_2|_{H_1} \leq L_2|\theta_1-\theta_2|_{L^2(\Omega)^M} \quad (3.3)$$

D'où:

$$|u_1-u_2|_{H_1} \leq C|\theta_1-\theta_2|_{L^2(\Omega)^M} \quad (3.4)$$

D'autre part, on a :

$$|\sigma_1-\sigma_2| = |\sigma_1-\sigma_2|_{\mathcal{H}} = |F(\varepsilon(u_1),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_2|$$

En appliquant (2.6) et (3.4), il résulte :

$$|\sigma_1-\sigma_2|_{\mathcal{H}} \leq C|\theta_1-\theta_2|_{L^2(\Omega)^M} \quad (3.5)$$

L'inégalité cherchée est maintenant une conséquence de (3.4) et (3.5).

Remarque 3

Le résultat du théorème 4 est important du point de vue mécanique, car il montre que des petites perturbations dans le paramètre θ n'entraînent que des petites perturbations dans la solution (u, σ) du problème de contact avec frottement (P).

3.3. Un résultat de pénalisation

Dans cette partie, on va étudier le problème pénalisé (P_1^μ) du problème (P_1) dont la solution u_μ dépend du paramètre $\mu>0$.

Pour chaque paramètre μ tel que $0<\mu<1$, on définit la fonctionnelle différentiable $j_\mu : V \to \mathbb{R}_+$ par :

$$j_\mu(v) = \frac{g}{1+\mu}\int_{\Gamma_3}|v_\tau|^{1+\mu}ds \quad \forall v \in V \quad (3.6)$$

En remplaçant la fonctionnelle j par j_μ dans le problème (P_1), on obtient le problème pénalisé suivant:

Problème P_1^μ. Trouver le champ des déplacements u_μ tel que:

$$u_\mu \in V, \quad \langle F(\varepsilon(u_\mu),\theta),\varepsilon(v)-\varepsilon(u_\mu)\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$+j_\mu(v)-j_\mu(u_\mu) \geq \langle \eta, v-u_\mu\rangle_V \quad \forall v \in V \quad (3.7)$$

Théorèmes d'existence et d'unicité

Théorème 5: Sous les hypothèses (2.6) - (2.9), le problème pénalisé (P_1^μ) admet une solution unique $u_\mu \in V$.

Démonstration : Puisque la fonctionnelle j_μ est propre, convexe et semi continue-inférieurement alors en utilisant les mêmes arguments que ceux déjà utilisés dans la démonstration du théorème 1, on peut affirmer qu'il existe un élément unique $u_\mu \in V$ tel que:

$$\langle F(\varepsilon(u_\mu),\theta),\varepsilon(v)-\varepsilon(u_\mu)\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$+j_\mu(v)-j_\mu(u_\mu) \geq \langle \eta, v-u_\mu\rangle_V \quad \forall v \in V$$

ceci achève la démonstration.

Maintenant, on s'intéresse au comportement de la solution du problème pénalisé (P_1^μ) quand μ tend vers zéro. Ceci est l'objet du résultat suivant:

Théorème 6: On suppose que les hypothèses (2.6) - (2.9) soient satisfaites. Alors la solution u_μ du problème pénalisé (P_1^μ) converge fortement vers la solution u du problème (P_1) dans V quand $\mu \to 0$.

Démonstration : Les étapes de la démonstration sont :

(i) La suite (u_μ) est bornée dans V.

(ii) La suite (u_μ) converge faiblement dans V vers la solution u du problème (P_1) quand $\mu \to 0$.

(iii) La suite (u_μ) converge fortement dans V vers la solution u du problème (P_1) quand $\mu \to 0$.

Pour plus de détails sur cette démonstration voir [1], p.500.

Remarque 5. Cette pénalisation nous permet d'approcher la solution faible u du problème (P_1) par la solution faible u_μ du problème (P_1^μ). Elle présente aussi un grand intérêt pour l'approche numérique du problème (P_1).

REFERENCES

[1]- Rochdi M., Teniou B., "Frictional contact problem for nonlinear elastic material", *App. Math. And Comp. Sci.* 3 (1998), pp.491-504.

[2]- Ionescu I.R., Sofonea M., "Functional and numercical methods in viscoplasticity", Oxford Univ. Press, Oxford (1993).

[3]- Sofonea M., "Some remarks on the solution in dynamic processes for rate-type models", *Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Physik (Zamp),* 41 (1990), pp.656-668.

[4]- Cristescu N., Suliciu I., "Viscoplasticity", Martinus Nirjhoff, Editura Technica, Bucharest (1982), p.84.

[5]- Duvaut G., Lions J.L., "Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod, Paris, (1972), p.11.

[6]- Blanchard D., "Nonlinear viscoelaticity with time-dependent coefficients", *Nonlinear Analysis*, vol.10, N°12 (1986), pp.1381-1410.

[7]- Sofonea M., "Problèmes non-linéaires dans la théorie de l'élasticité", Cours de Magister en mathématiques appliquées, Université Ferhat Abbes, Sétif (1993).

□