

Analyse de la distribution spatiale de la mortalité par COVID-19 en Algérie en 2020 : Une approche d'estimation par l'Algorithme de Metroplis-Langevin Ajusté

Ayoub ASRI^{1, *}, Cylia Iferroudjene¹,

¹ Ecole Nationale Supérieure de Statistiques et Economie Appliquée (Algérie)

Analysis of spatial distribution of COVID-19 mortality in Algeria 2020: a Metroplis-Adjusted Langevin Algorithm fitting approach

Ayoub ASRI^{1, *}, Cylia Iferroudjene¹,

¹ Higher National School of Applied Economy and Statistics (Algeria)

Date de réception : 04/10/2022 ; Date d'acceptation: 27 /12/2022 ; Date de publication: 31/12/2022

Analysis of spatial distribution of COVID-19 mortality in Algeria 2020: a Metroplis-Adjusted Langevin Algorithm fitting approach

Abstract: Bayesian methods have been greatly developed in the last two decades, especially in the field of public health. The advances in Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods have permitted Bayesian modeling to be used enormously by researchers. One of the latest additions to the MCMC family is the Metropolis-Adjusted Langevin Algorithm (MALA).

MALA has the advantage of incorporating stochastic differential equations into the classical Metropolis algorithm. Adding a diffusion equation to the MCMC algorithm has improved the accuracy of these algorithms. However, this method still consumes a huge amount of time until convergence. Combining MALA with spatial area data is now one of the most powerful tools to address some epidemiological problems.

We review spatial areal data analysis with the MALA algorithm in this paper and present an application on COVID-19 occurrence in Algeria in 2020.

Keywords: Bayesian Analysis; Spatial Models; COVID-19 occurrence; MALA; Hierarchical Modeling

Jel Classification Codes : C11 ; C31 ;

Résumé : Les méthodes bayésiennes se sont considérablement développées au cours des deux dernières décennies, notamment dans le domaine de la santé publique. Les avancées des méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC) ont permis à la modélisation bayésienne d'être énormément utilisée par les chercheurs. L'un des derniers ajouts à la famille MCMC est l'algorithme de Metropolis-Langevin Ajusté (MALA).

MALA a l'avantage d'incorporer des équations différentielles stochastiques dans l'algorithme Metropolis classique. L'ajout d'une équation de diffusion à l'algorithme MCMC a amélioré la précision de ces algorithmes. Cependant, cette méthode consomme encore énormément de temps jusqu'à la convergence. La combinaison de MALA avec des données spatiales surfaciques est maintenant l'un des outils puissants pour résoudre certains problèmes épidémiologiques.

Dans cet article, nous passons en revue l'analyse des données spatiales surfaciques avec l'algorithme MALA et présentons une application sur l'occurrence du COVID-19 en Algérie au cours de l'année 2020.

Mots-clés : Analyse bayésienne ; Modèles spatiaux ; Incidence du COVID-19 ; MALA ; Modélisation hiérarchique.

Codes de classification Jel : C11 ; C31.

I- Introduction :

Le monde a connu un certain nombre de pandémies provoquant des crises sanitaires dont les effets sont plus ou moins néfastes pour les pays, tant sur le plan humain qu'économique et social. A titre d'exemple, on peut notamment citer les fléaux (notamment la peste noire), les épidémies de choléra, la grippe espagnole, les épidémies de virus Ebola, la grippe A (H1N1), les épidémies de la fièvre de Dengue, et toutes les épidémies relatives au SARS, ces terribles pandémies sanitaires ont irréversiblement frappé le monde entier et laissé des centaines de millions de victimes dans le monde à travers l'histoire.

La crise sanitaire mondiale causée par le coronavirus ou la pandémie de COVID-19 a causé d'énormes dommages sociaux, culturels, économiques et médicaux dans le monde. La gravité de cette maladie se reflète dans la vitesse à laquelle elle se propage, l'immense pression qu'elle exerce sur les systèmes de santé les plus efficaces au monde.

L'utilisation de l'analyse et la modélisation spatiale est devenue une pratique récurrente en Epidémiologie ou en bio statistique. L'analyse spatiale est concernée par l'analyse des variables avec une distribution spatiale. L'analyse spatiale varie de l'analyse de l'autocorrélation spatiale, à l'utilisation des modèles surfacique, géostatistique ou des processus de variation spatiale.

La combinaison des techniques de l'analyse spatiale avec l'analyse bayésienne peut donner des résultats satisfaisants avec l'augmentation des capacités de calculs pour répondre au besoin gourmands des méthodes proposées. L'une des utilisations de ces méthodes est dans l'analyse de l'incidence et la mortalité des maladies les plus répandues et celles des maladies infectieuses.

Notre objectif est d'effectuer une analyse spatiale de l'incidence par COVID-19 durant l'année 2020 et essayer de proposer un modèle bayésien hiérarchique spatiale pour détecter la variabilité spatiale de cette incidence.

Pour atteindre notre objectif on va utiliser les données récoltées par le ministère de la santé, de la population et de la réforme hospitalière en Algérie. Ces données concerne la répartition de l'incidence par COVID-19 pour chaque wilaya. Puis, une analyse spatiale est effectuée pour détecter la présence ou l'absence d'une autocorrélation spatiale entre les différentes wilayas (zones d'études). La dernière étape concerne le choix d'un modèle bayésien hiérarchique convenable pour l'estimation de cette incidence. L'algorithme choisie pour l'estimation est l'algorithme de Metroplis-Langevin ajusté qui est souvent flexible avec la structure Conditionnelle Autorégressives supposé pour les données spatiales.

De ce fait, cette article est divisé en 3 parties essentielles. La première partie présente les aspects sur l'analyse spatiale et sur la modélisation bayésienne nécessaires pour répondre à cet objectif. Deuxième partie concerne la présentation des différents résultats de la modélisation. Dernièrement, une conclusion est présentée.

II- Méthodes et Matériels :

1. Données spatiales :

Selon (Cressie, 1993) les données spatiales ont été définies comme les réalisations consécutives d'un processus stochastique indexé spatialement (dans l'espace)

$$Y(s) \equiv \{y(s), s \in \mathcal{D}\}$$

où \mathcal{D} est un sous-ensemble (fixe) de \mathbb{R}^d (souvent on considère $d = 2$).

Si on dispose des données d'un certain phénomène, les observations peuvent représentées par un ensemble $\mathbf{y} = \{y(s_1), \dots, y(s_n)\}$ où l'ensemble (s_1, \dots, s_n) indique les unités spatiales. Ces unités montrent les endroits (ou les unités) dans lesquelles les mesures sont effectuées. Le type de l'ensemble \mathcal{D} peut déterminer le type de problème étudié. Si \mathcal{D} est une surface continue alors on définit un problème de processus aléatoire spatial continu et si \mathcal{D} est une collection d'unités spatiales à d dimension alors le problème concerne un processus spatial discret (Gelfand et al., 2010).

Par exemple, nous pouvons étudier un ensemble de variables atmosphériques mesurés sur des stations de monitoring atmosphérique situés dans des endroits (s_1, \dots, s_n) qui vont être considérés comme des n points. Dans ce cas, y est une réalisation du processus atmosphérique qui varie dans l'espace d'une manière continue, ce type de données est connu sous le nom de « géostatistiques ». Alternativement, on peut s'intéresser à l'étude d'un modèle spatial d'une certaine maladie observés dans un ensemble (s_1, \dots, s_n) de n régions (des polygones qui peuvent représenter un découpage administrative ou des unités de sondages). Dans ce cas, y peut représenter une agrégation des résultats obtenues pour toutes les réalisations dans cette région, comme le nombre de cas observés dans une région ou la moyenne des prix d'un certain produit dans les magasins de cette région (Asri & Benmariouche, 2021).

2. L'autocorrélation spatiale globale :

L'analyse de la présence ou l'absence de l'autocorrélation spatiale est un point essentiel dans l'analyse des données spatiales. Supposons qu'on dispose d'une série de données spatiales y , on peut mesurer l'association spatiale entre les différentes unités de la région d'étude.

Les indices d'autocorrélation spatiale globale tentent de résumer le degré d'association spatiale entre les unités spatiales. Le degré d'association peut refléter le degré similarité entre les unités les plus proches, ou en d'autres termes, essayer de répondre à la question suivante : « est-ce que les unités les plus proches ont des mesures similaires ? » (Griffith, 1992). Les résultats de ces indices dépendent du choix de la matrice de proximité.

La matrice de poids choisie est une matrice de contiguïté (Earnest et al., 2007) ou les éléments de cette matrice :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si les deux zones } i \text{ et } j \text{ ont une frontière commune} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1. I de Moran :

L'indice le plus utilisé pour le calcul de l'autocorrélation spatiale globale est l'indice de Moran, donnée par :

$$I = \frac{n \sum_i \sum_j w_{ij} (Y_i - \bar{Y})(Y_j - \bar{Y})}{(\sum_{i \neq j} w_{ij}) \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}$$

L'indice I n'est pas défini strictement sur l'intervalle $[-1, 1]$. Généralement, $|I| < 1$, sauf dans le cas où des régions avec des valeurs extrêmes ont des poids élevés. La borne supérieure théorique est donnée par (Banerjee et al., 2015, p. 75) :

$$|I| < \frac{n}{\sum_{i \neq j} w_{ij}} \left[\frac{\sum_{i \neq j} [\sum_j w_{ij} (Y_i - \bar{Y})]^2}{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Une autocorrélation spatiale positive est indiquée avec des valeurs positives de l'indice I , qui stipule que les unités les plus proches ont des mesures similaires. Des valeurs négatives indiquent une autocorrélation négative, où les valeurs unités proches ont des mesures différentes. Pour les valeurs de I proches de 0 indiquent l'absence d'association spatiale (Waller & Gotway, 2004, p. 228).

La significativité de la valeur observée I est jugée en comparant I à sa valeur moyenne, mais on doit tenir compte également de la variabilité attendue de la statistique I sous l'hypothèse nulle en tenant compte de l'hypothèse de distribution des données. Il existe deux hypothèses utilisées:

- L'hypothèse de Normalité : on définit le score $z = \frac{I - E[I]}{\sqrt{Var(I)}}$ qui suit une distribution Normale centrée et réduite $N(0,1)$
- La randomisation : il faut disperser les observations sur les n unités, ce qui donne une distribution de la randomisation. Si la valeur de I se situe dans les queues de distribution, l'hypothèse d'indépendance des mesures est rejetée.

2.1. Le test de Monte Carlo :

Dans la littérature, l'indice de Moran est souvent utilisé comme un test statistique et non pas une mesure de l'association spatiale (Banerjee et al., 2015, p. 75), car le ratio des deux formes quadratiques converge vers une distribution Normale d'une manière très lente. Une alternative est souvent proposée, en suivant les hypothèses suivantes (Good, 2005, p. 233)

- Hypothèse nulle : les mesures sont collectées puis affecter au hasard à leurs unités.
- Hypothèse alternative : l'affectation d'une unité dépendent de l'affectation de son voisinage

Sous l'hypothèse nulle, la distribution de I est invariante aux permutations des Y_i . La distribution exacte de I sous l'hypothèse nulle nécessite le calcul des valeurs de toutes les $n!$ permutations des mesures Y_i , ce qui est infaisable pour des valeurs élevées de n en pratique. Cependant, un échantillon de Monte Carlo d'un nombre élevé (1000 généralement) permutations incluant la permutation la permutation observée va positionner la valeur de I pour la permutation observée par rapport aux autres (999) permutations, puis déterminer si cette valeur est extrême (en utilisant une p-value empirique) (Good, 2005).

2.3. C de Geary :

L'indice C de Geary est un indicateur alternatif à celui de Moran, est défini

$$C = \frac{(n-1) \sum_i \sum_j w_{ij} (Y_i - Y_j)^2}{2(\sum_{i \neq j} w_{ij}) \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}$$

L'indice de Geary n'est jamais négatif et il varie entre [0,2]. Des valeurs proches de 0 indiquent une autocorrélation négative entre les unités et des valeurs proche de 2 indiquent l'existence d'une autocorrélation spatiale positive. Alors que, des valeurs proches de 1 veut dire l'absence de l'autocorrélation spatiale.

3. L'autocorrélation spatiale locale :

3.1. Les indicateurs locaux d'autocorrélation spatiale

Un ensemble d'indicateurs locaux d'association spatiale a été introduit, connu comme les indicateurs locaux d'autocorrélation spatiale (LISA : Local Indicators of Spatial Autocorrelation (Anselin, 1995)). Les indicateurs LISA permet une décomposition des indicateurs globaux, ils peuvent être défini pour tout statistique qui vérifie les conditions suivantes :

- LISA pour chaque observation indique l'étendue de la concentration spatiale significative autour de l'observation.
- La somme des indicateurs LISA pour toutes les observations est proportionnelle à un indicateur global d'association spatiale. Si l'on veut évaluer la mesure dans laquelle une statistique globale est représentative du modèle moyen d'association locale, cette exigence est importante.

3.2. I de Moran local

L'un des indicateurs les plus communs et la version locale de l'indice I de Moran, appelé parfois l'indicateur Anselin-Moran, défini comme :

$$I_i = \frac{n(Y_i - \bar{Y})}{\sum_j (Y_j - \bar{Y})^2} \sum_j w_{ij} (Y_j - \bar{Y})$$

On peut clairement vérifier la deuxième condition, si on remarque que l'indice I de Moran est une somme pondérée de cet indice local, en écrivant :

$$I = \frac{1}{\sum_{i \neq j} w_{ij}} \sum_i I_i$$

Typiquement, les valeurs des LISA sont cartographiées pour indiquer l'emplacement des unités avec une association locale relativement élevée ou faible avec les unités voisines. Une valeur élevée pour I_i suggère que l'unité est entourée d'unités avec des valeurs similaires. Une telle unité fait partie d'un groupe d'observations élevées, basses ou modérées. Une faible valeur pour I_i indique que l'unité est entourée d'unités avec des valeurs différentes. Une telle unité est considérée comme aberrante. L'observation dans l'unité i est différente de la plupart ou de toutes les observations de ses voisins.

3.3. G de Getis-Ord

Parmi les inconvénients des indices I de Moran et C de Geary, est qu'ils n'arrivent pas à déterminer si les mesures spatiales sont dues à des valeurs élevées ou faibles. La méthode G(d) est capable de discerner entre les zones de mesures chaudes (valeurs élevées) et les zones de mesures froides (valeurs faibles) sur toute la région d'étude. Cette méthode peut être utilisée pour déterminer les concentrations (où cluster) spatiales de phénomènes particuliers.

L'indice $G(d)$ est calculé seulement dans le cas de voisinage basé sur la distance. Alors pour une distance d (généralement la distance qu'on espère avoir des groupes ou clusters), l'indice $G(d)$ qui mesure l'association spatiale est définie par :

$$G(d) = \frac{\sum_{i \neq j} w_{ij}(d) Y_i Y_j}{\sum_{i \neq j} Y_i Y_j}$$

3.4. L'exploration graphique

Il existe quelques types de graphiques qui permettent de mieux interpréter les indicateurs locaux d'autocorrélation spatiale. L'outil le plus utilisé est « le nuage de point de Moran » (Anselin, 1996), qui peut être défini pour tous les indicateurs LISA.

Le nuage de points de Moran, consiste en un graphique avec la mesure spatialement retardé Y_{i-1} sur l'axe des y et la mesure originale Y_i sur l'axe des x. La pente de l'ajustement linéaire de ce nuage de point est égale à l'indice I de Moran.

Un aspect important de la visualisation dans le nuage de points de Moran est la classification de la nature de l'autocorrélation spatiale en quatre catégories. Puisque le graphique est centré sur la moyenne (de zéro), tous les points à droite de la moyenne ont $z_i > 0$ et tous les points à gauche ont $z_i < 0$. Nous désignons ces valeurs respectivement comme élevées (H) et faibles (L), dans le sens que la mesure est de plus ou moins élevées que la moyenne. De même, nous pouvons classer les valeurs pour le retard spatial au-dessus et en dessous de la moyenne comme étant élevées (H) et faibles (L).

4. Analyse Bayésienne spatiale

Les modèles d'hétérogénéité non corrélée avec des distributions a priori Gamma ou Bêta pour le risque relatif sont utiles mais présentent un certain nombre d'inconvénients. Premièrement, une distribution Gamma ne permet pas facilement d'étendre l'ajustement ou la modélisation des variables explicatives, et, deuxièmement, il n'y a pas de généralisation simple et adaptable de la distribution Gamma avec des paramètres spatialement corrélés. Il existe quelques modèles d'utilisation de modèles de Gamma corrélés, mais ces modèles se sont révélés peu performants lors d'une évaluation de plusieurs simulations (Best et al., 2005).

Les avantages de l'incorporation d'une spécification Gaussienne sont nombreux. Tout d'abord, un effet aléatoire qui est log-gaussien se comporte de manière similaire à une variable Gamma, mais le modèle gaussien peut inclure une structure de corrélation. Par conséquent, dans le cas où l'on soupçonne que des effets aléatoires sont corrélés, il est plus simple de spécifier une forme log Gaussienne pour toute variation supplémentaire présente. L'extension la plus simple consiste à considérer des composants additifs décrivant différents aspects de la variation soupçonnée dans les données. On peut distinguer deux types de variations (hétérogénéité) dans les données spatiales. La variation structurée qui est due à la variation dans l'espace du phénomène et une variation non structurée qui est souvent considérée comme un bruit blanc.

Il existe de nombreuses façons d'incorporer une telle hétérogénéité dans les modèles. Premièrement, il est souvent important d'inclure une variété d'effets aléatoires dans un modèle. La méthode la plus fréquente est d'utiliser des modèles autorégressifs conditionnelles (CAR) comme des distributions a priori pour identifier la structure de l'hétérogénéité.

Le prédicteur linéaire donné par l'équation (3.9) peut être défini par :

$$\eta_i = \beta_0 + x_i' \beta + \zeta_i$$

$$\zeta_i = v_i + \nu_i$$

où $x_i' \beta$ est une composante fixe ou tendancielle du vecteur des variables explicatives, v_i et ν_i représentent les hétérogénéité corrélée et non corrélée respectivement. Ces composants ont des distributions a priori distinctes. La spécification des distributions a priori et hyper a priori diffère d'un modèle CAR à un autre.

4.1. Le modèle CAR intrinsèque (ICAR)

Le modèle CAR le plus simple est le modèle autorégressif intrinsèque (ICAR) (Besag et al., 1991), a des distributions conditionnelles complètement spécifiées données par :

$$\zeta_i | \zeta_{-i} \sim N(m_i, s_i^2)$$

$$m_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \zeta_j}{\#\mathcal{N}(i)} \quad \text{et} \quad s_i^2 = \frac{\sigma_\zeta^2}{\#\mathcal{N}(i)}$$

où $\#\mathcal{N}(i)$ est le nombre de zones voisines de i (au voisinage), défini selon la matrice de proximité.

L'espérance conditionnelle de ζ_i est égale à la moyenne des effets aléatoires dans les zones voisines, tandis que la variance conditionnelle est inversement proportionnelle au nombre de voisins $\#\mathcal{N}(i)$. Cette structure de variance reconnaît le fait qu'en présence d'une forte corrélation spatiale, à chaque fois la zone ait plus de voisins, plus qu'elle ait d'informations sur la valeur de son effet aléatoire. Le paramètre de variance σ_ζ^2 contrôle la quantité de variation entre les effets aléatoires, cela va dépendre du choix de la distribution hyper a priori.

Le modèle ci-dessus est le modèle CAR le plus simple possible, et par conséquent est plutôt restrictif. Son paramètre unique ne détermine pas la force de la corrélation spatiale entre les effets aléatoires, car multiplier chaque ζ_i par une constante augmentera σ_ζ^2 mais laissera la structure de corrélation spatiale inchangée. Par conséquent, le modèle (3.21) ne peut représenter que de fortes structures de corrélation spatiale et n'est donc pas approprié si les données ne sont que faiblement corrélées.

Il existe plusieurs variantes pour les modèles CAR, comme le modèle de convolution connu sous le nom du modèle (Besag, York et Mollié) qui a été proposé par les mêmes auteurs (Besag et al., 1991), le modèle de Cressie (Cressie, 1993, p. 407; Stern & Cressie, 2000) et le modèle de Dean (Dean et al., 2001) qui est aussi connu par le nom du modèle BYM2 (Riebler et al., 2016). Il existe aussi le modèle de Leroux qui sera utilisé dans cette étude.

4.2. Le modèle de Leroux

Un autre modèle couramment utilisé dans la littérature a été initialement proposé par Leroux (Leroux et al., 1999) et a été exploré d'avantage par MacNab (MacNab, 2003). Il est basé sur un seul ensemble d'effets aléatoires qui sont représentés par la distribution Gaussienne multivariée :

$$\zeta \sim N(\beta_0, s^2)$$

$$s^2 = \frac{\sigma_\zeta^2}{\rho W^* + (1 - \rho) I_n}$$

où I_n est la matrice d'identité de dimension $n \times n$.

Comme pour le modèle CAR, cette distribution a priori a une moyenne constante non nulle β_0 . Par conséquent, les éléments de la matrice W^* sont donnés par :

$$w_{ij}^* = \begin{cases} \#\mathcal{N}(i) & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont des voisins} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice de précision est donc une moyenne pondérée de structures de corrélation spatialement dépendantes (représentées par W^*) et indépendantes (représentées par I_n), où le poids est égal à ρ . Les distributions conditionnelles complètes univariées correspondantes sont données par :

$$\zeta_i \mid \zeta_{-i} \sim N(m_i, s_i^2)$$

$$m_i = \frac{\rho \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \zeta_j + (1 - \rho)\beta_0}{\#\mathcal{N}(i)\rho + 1 - \rho} \quad \text{et } s_i^2 = \frac{\sigma_\zeta^2}{\#\mathcal{N}(i)\rho + 1 - \rho}$$

L'espérance conditionnelle est une moyenne pondérée des effets aléatoires dans les régions voisines et la moyenne globale β_0 , tandis que la variance conditionnelle a une forme plus attrayante que celle des autres modèles. Lorsqu'il y a une forte corrélation spatiale dans les données, ρ sera proche de 1 et la variance conditionnelle est d'environ $\sigma_\zeta^2 / \#\mathcal{N}(i)$, ce qui est le même que dans le modèle intrinsèque. En revanche, si les effets aléatoires sont indépendants $\rho = 0$, et la variance conditionnelle de ζ_i est une constante (égale à σ_ζ^2). Ceci est en contradiction avec le modèle CAR mais plus intéressant théoriquement car il n'y a plus d'informations sur ζ dans les effets aléatoires voisins.

Ce modèle est implémenté dans le logiciel dans le cas de MCMC (Lee, 2013) ou INLA (Rue et al., 2009).

5. La spécification des hyperparamètres pour le modèle BYM

Pour terminer la définition d'un modèle bayésien spatial il faut préciser la distribution hyper a priori des hyperparamètres du modèle (σ_ζ^2 et ρ) dans le cas d'un modèle de Leroux. Il existe plusieurs distributions hyper a priori utilisées dans la littérature empirique.

Les distributions hyper a priori illicites qui sont des distributions objectives et qui n'apportent pas beaucoup d'informations (Berger, 2006) ou Les distributions impropres de Jeffreys sont souvent utilisées. Leurs utilisations dépendent du design du problème et ils ne sont pas acceptés par beaucoup de Bayésiens (Goldstein, 2006). Toutefois, ils sont utiles et souvent utilisés dans la littérature.

Dans le cas de manque d'informations sur l'hyperparamètre, une ignorance complète du paramètre n'est pas supportée, mais des distributions peu informatives sont supposées. Parmi ces distributions on peut avoir les distributions Uniformes, Gamma, Gamma inversé ou même les distributions Half-Cauchy.

L'approche de la spécification de la distribution hyper a priori non subjective la plus courante pour les modèles hiérarchiques consiste à utiliser un a priori qui a déjà été utilisé dans la littérature pour un problème similaire. Cette approche ad-hoc peut être considérée comme une stratégie d'aversion au risque, dans laquelle le choix de la distribution a priori est délégué à un autre chercheur.

6. La méthode MCMC

L'idée de base des méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC) est la génération d'un échantillon $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ qui suit approximativement la même distribution a posteriori π en passant par la génération d'une chaîne de Markov ergodique $\theta^{(t)}$, avec un point de départ arbitraire $\theta^{(0)}$ et une distribution transitoire avec une distribution stationnaire π . Cette procédure assure la convergence d'une manière générale de la distribution de l'échantillon généré $\theta^{(t)}$ vers la distribution stationnaire π . Puisque la chaîne utilisée est ergodique, alors le choix de $\theta^{(0)}$ est souvent arbitraire.

Il existe plusieurs algorithmes qui permettent d'implémenter cette méthode MCMC, comme l'échantillonnage de Gibbs, la méthode de Monte Carlo Hamiltonienne (HMC, (Neal, 2011)) et la méthode utilisée dans cet article l'algorithme de Metropolis-Hastings.

6.1. L'algorithme de Metropolis

Cet algorithme est un algorithme itératif d'acceptation-rejet avec une fonction d'intérêt proportionnelle à la distribution à posteriori à générer. Les étapes de l'algorithme de Metropolis sont illustrées dans l'algorithme (1).

Sous certaines conditions de convergence, l'échantillon généré $\theta^{(t)}$ converge en distribution vers un tirage à partir de la densité a posteriori réelle $p(\theta|y)$ (Roberts & Smith, 1994).

Cet algorithme a été développé pour avoir de meilleurs résultats, on peut trouver l'algorithme de Metropolis avec marche aléatoire. L'algorithme de Metropolis-Hastings et l'algorithme de Langevin-Hastings qui sera utilisé dans cette étude.

6.2. L'algorithme de Langevin-Hastings

Cette approche est une approche plus efficace qui généralise l'utilisation des marches aléatoires par les utilisations des « dérives » (Gaetan & Guyon, 2009, p. 38) dans les espérances des densités pour diriger la chaîne dans la direction du mode de la distribution a posteriori. Cette algorithme est souvent connu comme l'algorithme MALA (algorithme de Langevin-Metropolis Ajusté) (Xifara et al., 2014).

L'alternative abordé est dérivée de la théorie de la diffusion. L'idée principale est de trouver une équation de diffusion (équation différentielle stochastique) qui produit une diffusion (un processus en temps continu) avec une distribution stationnaire h , puis il faut discrétiser le processus pour pouvoir implémenter la méthode. Plus spécifiquement, la diffusion de Langevin L_t est définie par l'équation aux dérivées partielles suivante

$$dL_t = dB_t + \frac{1}{2} \nabla \log h(L_t) dt$$

où B_t est un mouvement brownien standard (Loffler & Kruschwitz, 2019, p. 87).

L'implémentation de cette équation de diffusion nécessite une étape de discrétisation, où la diffusion définie précédemment est remplacée par une transition de forme marche aléatoire :

$$\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \nabla \log h(\theta^{(t-1)}) + \tilde{\sigma} \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \sim N(0, I_n)$ et $\tilde{\sigma}^2$ un paramètre qui contrôle la discrétisation (Algorithme (2)).

Les mêmes conditions que pour l'algorithme de Metropolis s'appliquent pour s'assurer que la distribution de $\theta^{(t)}$ converge en loi vers la distribution a posteriori $p(\theta|y)$ quand $t \rightarrow \infty$.

6.3. Diagnostic de la convergence

Il existe plusieurs diagnostics pour tester la convergence de la distribution.

Avant de commencer les diagnostics numériques une analyse graphique de barres des différentes séries pour chaque paramètre peut être effectuée (Lee, 2013, p. 21). On peut aussi utiliser la statistique de Geweke de convergence qui représente un meilleur diagnostic de convergence, où il faut s'assurer que le Z-score de la statistique issue de la densité spectrale $g(\theta^{(t)})$

$$\bar{g}_n = \frac{\sum_{t=1}^n g(\theta^{(t)})}{n}$$

soient à l'intérieur de l'intervalle $[-1.96, 1.96]$ (Geweke, 1992).

Un autre diagnostic de la convergence, qui est le facteur de risque d'échelle potentielle est proposé par Gelman (Gelman et al., 2013, p. 283), où il faut calculer la statistique PSRF pour chaque paramètre estimé ψ par :

$$\hat{R} = \sqrt{\frac{n-1}{n} W + \frac{1}{n} B}$$

où B est la variance interclasse et W la variance intraclasse. Pour s'assurer de la convergence il faut que cette statistique soit proche de 1 (généralement, inférieur à 1.1) (Gelman et al., 2013, p. 287).

III-Résultats et Discussion :

1. Les données :

Pour l'application de cette méthode, on utilise les données sur l'incidence par COVID-19 en Algérie durant l'année 2020. La variable utilisée est le nombre de nouveaux cas observés de cette pandémie par wilaya (l'unité administrative adoptée en Algérie, il existe 48 unités) pour l'année 2020. Les données sont récoltées à partir des rapports journaliers du ministère de la santé, de la population et de la réforme hospitalière en Algérie. On peut aussi trouver ces publications dans les rapports publiés par l'Institut Nationale de Santé Publique (INSP) présents sur le lien suivant : <https://www.insp.dz/index.php/publications/situation-epidemiologique-covid19.html>.

2. L'autocorrélation spatiale globale

On procède par une étude d'autocorrélation pour la variable représentant l'incidence de COVID-19 en Algérie. Le résultat du test de Moran effectué est présenté dans le Tableau (1). D'après ce test on constate que la valeur estimée de Moran est de 0.1641 qui indique une présence significative de l'autocorrélation spatiale entre les différentes zones d'étude. Ce résultat peut être vérifié par le test de Geary qui figure dans le Tableau (1)

L'analyse du graphique de Moran (Figure (2)) nous permet de confirmer les résultats obtenus par les tests statistiques de permutations. On remarque par contre que les wilayas d'Alger, Oran, Boumerdes et Tipaza ont le plus d'influence sur l'autocorrélation. Cela est expliqué par le fait que ces wilayas ont le nombre de cas le plus élevé dans tout le pays.

3. L'autocorrélation spatiale locale

Il est souvent conseillé d'étudier l'autocorrélation au niveau de chaque wilaya pour détecter les wilayas avec forte corrélation.

L'analyse des Z-scores présents dans la Figure (3), on constate une confirmation des résultats obtenues par le test de permutation ou toutes les wilayas présentent une autocorrélation non significative sauf pour les wilayas d'Alger et d'Oran en Nord et les wilayas du Sud. Cela est expliqué par le fait ces wilayas ont des taux d'incidence trop différent (élevé ou faible) par rapport aux wilayas voisines. On peut aussi confirmer ces propos en analysant les résultats de la Figure (4) avec l'indice de Getis-Ord calculé localement.

Dernièrement, la carte de décomposition LISA (Figure (5)) résume le calcul d'autocorrélation locale. La division en 4 différentes zones peut aider les autorités à mieux cibler les interventions.

4. Spécification du modèle

L'agrégation (la somme) des données par wilaya est utilisée pour définir un modèle bayésien hiérarchique pour modéliser l'incidence par COVID-19 en prenant en intégrant une composante spatiale (variation spatiale). Pour la i -ème wilaya, l'incidence, est modéliser comme :

$$y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$$

où la moyenne λ_i est définie : $\lambda_i = \rho_i E_i$, où ρ_i représente le risque de chacune des wilayas algérienne et E_i est l'incidence espéré, calculée en utilisant la méthode de standardisation indirecte pour chaque wilaya. Le prédicteur linéaire est alors défini :

$$\eta_i = \log(\rho_i) = \alpha + u_i + v_i$$

En remarque l'inclusion d'une échelle logarithmique, où α est la constante permettant de calculer la moyenne de l'incidence par COVID-19 à l'échelle nationale, u_i et v_i sont donc les effets spécifiques, où v_i est un résidu spatialement structuré et qui est modélisé par un modèle de Leroux

$$v_i | v_{j \neq i} \sim N(m_i, s_i^2)$$

$$m_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} v_j + (1 - \rho)\beta_0}{\#\mathcal{N}(i)\rho + 1 - \rho} \quad \text{et} \quad s_i^2 = \frac{\sigma_v^2}{\#\mathcal{N}(i)\rho + 1 - \rho}$$

avec $\#\mathcal{N}(i)$ est le nombre de wilayas dans le voisinage de la zone i , La figure (1) donne une représentation du voisinage de i . Enfin, v_i représente les résidus non spatialement structurés et qui suivent distribution a priori non échangeable Gaussienne $v_i \sim N(m_v, \sigma_v^2)$.

Pour le dernier niveau hiérarchique, on propose plusieurs distributions hyper a priori pour les hyperparamètres. Pour ρ on utilise une distribution Uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, qui est la même distribution par défaut pour le package CARBayes (Lee, 2013, p. 5). Pour les deux autres paramètres on propose des distributions Gamma inversés $\sigma_v^2 \sim GI(a_v, b_v)$ et $\sigma_v^2 \sim GI(a_v, b_v)$. Les différentes propositions sont présentées dans le tableau (2).

5. Résultats du modèle

Pour choisir le meilleur modèle, on utilise le critère d'information de la déviance (DIC , (Spiegelhalter et al., 2002)), le nombre effectif de paramètres estimés correspondant (P_D), le critère d'information d'Akaike-Watanabe ($WAIC$, (Watanabe, 2010)), le nombre de paramètres correspondant (P_W), le logarithme de la vraisemblance de la distribution marginale prédictive (LMPL, (Congdon, 2005)) et logarithme de la vraisemblance.

Le modèle qui optimise les différents critère est le modèle (5) avec une différence notable pour les critères DIC et $WAIC$ qu'il faut minimiser. De ce fait, Le dernier niveau hiérarchique du modèle sera défini par :

$$\sigma_v^2 \sim GI(0.02, 0.01) \quad \text{et} \quad \sigma_v^2 \sim GI(0.02, 0.01)$$

Après avoir déterminer la distribution des hyperparamètres, on procède à l'estimation par la méthode MALA. On a utilisé un échantillon de 300000 valeurs avec 100000 comme période de chauffe et un taux de thinning de 1/100, qui implique que pour chaque cent valeurs simulées on utilise une seule seulement pour l'estimation. De ce fait on va avoir un échantillon de 2000 pour l'estimation.

Pour assurer la convergence, on va exécuter 03 chaines et procéder à un test graphique (Figure (06)). Le test pour le paramètre de régression montre un mélange entre les chaines et une convergence des chaines, puisqu'elles ont les mêmes moyennes et la même tendance de gauche à droite. On peut confirmer ce résultat avec le test de Gelman (Figure (07)) ou on remarque que la valeur du test converge vers 1, qui représente un signe d'accepter la convergence.

Les résultats d'estimations des paramètres sont dans le tableau (4). On remarque que la constante α (en exponentiel) représente la valeur du taux d'incidence moyen sur l'échelle national (la région d'étude) Ces résultats vont être utilisés pour calculer le risque relative (RR) qui est une estimation du taux d'incidence standardisé (SIR).

La Figure (8) montre la moyenne a posteriori du risque relatif de l'incidence par du COVID-19 pour chaque wilaya comparée à tout le pays. On remarque que toutes les wilayas capitales du pays (Alger, Oran, Constantine, ...) ont un RR très élevé et cela est dû au nombre de cas d'incidence très élevé enregistré. On remarque aussi que les wilayas du Sud montre un excès du RR relatif cela est probablement en relation avec la distribution spatio-temporelle de l'incidence dans ces wilayas (cette question est traitée par l'auteur dans un autre article).

Dernièrement, on peut présenter l'excès du risque, qui est représenté par la probabilité a posteriori que le risque dépasse 1, $P(v_i + v_i > 1 | \mathbf{y})$. La probabilité est calculée puis présenté en Figure (8), tout le pays enregistre des probabilités très élevé durant la période 2020 ou le risque d'incidence était au plus haut avec les différentes vagues enregistrées.

6. Discussions

Le ministère de santé Algérien a mis en œuvre un système de récolte et de mise à jour des données d'incidence et de mortalité de la pandémie COVID-19. Cette base de données a été utilisée dans divers analyse statistique de la pandémie. Dans ce papier on a présenté un outil puissant

d'analyse des données relatives au santé publique, à savoir l'analyse spatiale de l'incidence, ainsi que la modélisation spatiale bayésiennes.

Les résultats de l'analyse de l'autocorrélation spatiale ont été relatives à la situation sanitaire de l'année 2020 ou les wilayas les plus touchées comme les capitales du pays (Alger, Oran, Constantine ...) ont pu influencer la significativité des indices calculées. Pour les wilayas du Sud le nombre faible de cas a permis de les classer comme des zones froides (selon l'indice de Getis-Ord).

L'utilisation de la méthode MALA pour estimer la distribution du risque relatif de l'incidence des nouveaux cas atteints par COVID-19 nous a permis de détecter une dynamique un peu similaire à celles de du SMR.

IV- Conclusion:

Dans cet article, une application sur l'utilisation de la méthode MALA pour un modèle spatial a été illustrée. Malgré l'utilisation extensive de ces modèles en épidémiologie, mais leur complexité constitue toujours un défi lors de l'implémentation, puisqu'elles nécessitent des capacités et temps de calcul énorme. L'utilisation des méthodes de Monte Carlo pour un problème spatial fournissent souvent des bonnes estimations surtout avec l'algorithme MALA. Le seul bémol est le temps de calcul surtout avec l'augmentation du volume des données et le nombre de chaînes utilisées.

L'application dans cet article peut inciter au recours à des modèles bayésiens hiérarchiques pour répondre à un divers type de problèmes, surtout celle reliées au COVID-19 puisque les données sont méticuleusement récoltées par les autorités.

Incorporer de variétés de données spatiales comme les historiques des déplacements ou les résidences des personnes atteintes par COVID-19 pourra mener à utiliser des méthodes spatiales plus sophistiquées et probablement plus de fiabilité des résultats.

Le code et les données utilisées dans cette étude sont librement partagé par l'auteur dans son GitHub sur le lien suivant : https://github.com/blackrow/covid_dz_article .

Références:

- Anselin, L. (1995). Local indicators of spatial association—LISA. *Geographical Analysis*, 27(2), 93–115. <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1995.tb00338.x>
- Anselin, L. (1996). The Moran Scatterplot as an ESDA Tool to Assess Local Instability in Spatial Association. In M. Fischer, H. Scholten, & D. Unwin, *Spatial Analytical Perspectives on GIS* (pp. 121–138). Taylor & Francis.
- Asri, A., & Benmariouche, R. (2021). Using INLA/SPDE Approach for Estimating a Spatial Model for Lung Cancer Mortality in Algeria 2016. *Revue d'Economie et de Statistique Appliquée*, 18(1), 261–277.
- Banerjee, S., Carlin, B., P., & Gelfand, A., E. (2015). *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data* (2nd ed.). CRC Press.
- Berger, J. (2006). The Case for Objective Bayesian Analysis. *Bayesian Analysis*, 1(3), 385–402. <https://doi.org/10.1214/06-ba115>
- Besag, J., York, J., & Mollié, A. (1991). Bayesian image restoration, with two applications in spatial statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 43(1), 1–20. <https://doi.org/10.1007/BF00116466>.
- Best, N., Richardson, S., & Thomson, A. (2005). A comparison of Bayesian spatial models for disease mapping. *Statistical Methods in Medical Research*, 14(35), 35–39. <https://doi.org/10.1191/0962280205sm388oa>
- Carlin, B., P., & Louis, T., A. (2009). *Bayesian Methods for Data Analysis*. (3rd ed.). CRC Press.
- Congdon, P. D. (2005). *Bayesian models for categorical data* (1st ed.). John Wiley & Sons.
- Cressie, N. (1993). *Statistics for Spatial Data*. John Wiley & Sons.
- Dean, C., B., Ugarte, M., D., & Militino, A., F. (2001). Detecting interaction between random region and fixed age effects in disease mapping. *Biometrics*, 57(1), 197–202. <https://doi.org/10.1111/j.0006-341X.2001.00197.x>
- Earnest, A., Morgan, G., Mengersen, K., Ryan, L., Summerhayes, R., & Beard, J. (2007). Evaluating the effect of neighbourhood weight matrices on smoothing properties of Conditional Autoregressive (CAR) models. *International Journal of Health Geographics*, 6(54). <https://doi.org/10.1186/1476-072X-6-54>

- Gaetan, C., & Guyon, X. (2009). *Spatial Statistics and Modeling*. Springer Science & Business Media.
- Gelfand, A. E., Diggle, P. J., Fuentes, M., & Guttorp, P. (2010). *Handbook of Spatial Statistics*. CRC Press.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian Data Analysis* (3rd ed.). CRC Press.
- Geweke, J. (1992). Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments. *IN BAYESIAN STATISTICS*, 169–193.
- Goldstein, M. (2006). Subjective Bayesian Analysis: Principles and Practice. *Bayesian Analysis*, 1(3), 403–420. <https://doi.org/10.1214/06-ba116>
- Good, P. (2005). *Permutation, Parametric, and Bootstrap Tests of Hypotheses* (3rd ed.). Springer Science & Business Media.
- Griffith, D. A. (1992). What is spatial autocorrelation? Reflections on the past 25 years of spatial statistics. *Espace Géographique*, 21(3), 265–280. <https://doi.org/10.3406/spgeo.1992.3091>
- Lee, D. (2013). CARBayes: An R Package for Bayesian Spatial Modeling with Conditional Autoregressive Priors. *Journal of Statistical Software*, 13(55), 1–24.
- Leroux, B. G., Lei, X., & Breslow, N. (1999). Estimation of disease rates in small areas: A new mixed model for spatial dependence. In E. Halloran M. & D. Berry (Eds.), *Statistical models in epidemiology, the environment and clinical trials*, (pp. 179–192). Springer-Verlag.
- Loffler, A., & Kruschwitz, L. (2019). *The Brownian Motion: A Rigorous but Gentle Introduction for Economist*. Springer.
- MacNab, Y., C. (2003). Hierarchical Bayesian modelling of spatially correlated health service outcome and utilization rates. *Biometrics*, 59(2), 305–316. <https://doi.org/10.1111/1541-0420.00037>
- Neal, R. M. (2011). MCMC using Hamiltonian dynamics. In S. Brooks, A. Gelman, G. Jones L., & X.-L. Meng (Eds.), *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* (pp. 113–162). Chapman & Hall / CRC Press.
- Riebler, A., Sørbye, S. H., Simpson, D., & Rue, H. (2016). An intuitive Bayesian spatial model for disease mapping that accounts for scaling. *Statistical Methods in Medical Research*, 25(4), 1145–1165. <https://doi.org/10.1177/0962280216660421>
- Roberts, G. O., & Smith, A. F. M. (1994). Simple conditions for the convergence of the Gibbs sampler and Metropolis-Hastings algorithms. *Stochastic Processes and Their Applications*, 49, 207–216. [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(94\)90134-1](https://doi.org/10.1016/0304-4149(94)90134-1)
- Rue, H., Martino, S., & Chopin, N. (2009). Approximate Bayesian inference for latent Gaussian models by using integrated nested Laplace approximations. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 71(2), 319–392. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2008.00700.x>
- Spiegelhalter, D., Best, N. G., Carlin, B. P., & Van Der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 64(4), 583–639. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00353>
- Stern, H. S., & Cressie, N. (2000). Posterior predictive model checks for disease mapping models. *Statistics in Medicine*, 19(17), 2377–2397. [https://doi.org/10.1002/1097-0258\(20000915/30\)19:17/18<2377::aid-sim576>3.0.co;2-1](https://doi.org/10.1002/1097-0258(20000915/30)19:17/18<2377::aid-sim576>3.0.co;2-1)
- Waller, L. A., & Gotway, C. A. (2004). *Applied Spatial Statistics for Public Health Data*. John Wiley & Sons.
- Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. *Journal of Machine Learning Research*, 11, 3571–3594.
- Xifara, T., Sherlock, C., Livingstone, S., Byrne, S., & Girolami, M. (2014). Langevin diffusions and the Metropolis-adjusted Langevin algorithm. *Statistics and Probability Letters*, 91, 14–19. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2014.04.002>

- Annexes :

Tableau (1) : Tests d'autocorrélation spatiale globale

Mesure	Valeur	Espérance	Variance	P-value	MC test P-value	Décision
Moran I	0.1641	-0.0212	0.0057	0.0070	0.024	Accepté
Geary C	0.6235	1	0.0309	0.0161	0.01	Accepté

Source: élaboré par les auteurs

Tableau (2) : Différents modèles proposés

paramètres	Modèle 01	Modèle 02	Modèle 03	Modèle 04	Modèle 05	Modèle 06	Modèle 07
a_u	1	0.5	0.1	0.05	0.02	0.01	0.05
b_u	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.05
a_v	1	0.5	0.1	0.05	0.02	0.01	0.05
b_v	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.05

Source: élaboré par les auteurs

Tableau (3) : Choix du meilleur modèle

Coefficient	Modèle 01	Modèle 02	Modèle 03	Modèle 04	Modèle 05	Modèle 06	Modèle 07
DIC	590.766	572.211	594.281	577.189	550.148	575.411	560.082
P_D	80.681	71.436	82.522	73.950	60.443	73.029	65.403
$WAIC$	934.608	825.341	935.066	823.396	643.867	857.909	659.989
P_W	231.917	178.321	231.940	176.963	88.756	194.610	96.238
$LMPL$	-1064.954	-1194.337	-1026.678	-1194.058	-1059.186	-1332.653	-761.357
Log Likelihood	-214.701	-214.669	-214.618	-214.644	-214.631	-214.676	-214.638

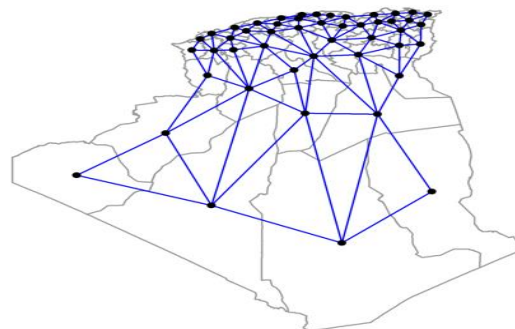
Source: élaboré par les auteurs

Tableau (4) : Estimation des paramètres du modèle

Coefficient	Moyenne	2.5%	97.5%	Geweke.diag
α	0.5928	0.5738	0.6116	0
τ^2	0.8928	0.4369	1.6547	-1.4
ρ	0.379	0.0548	0.8379	-0.3

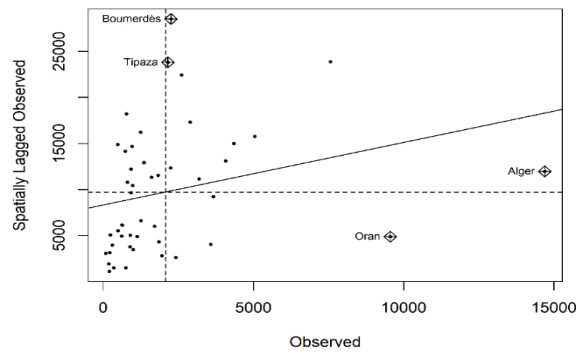
Source: élaboré par les auteurs

Figure (1): Voisinage spatial



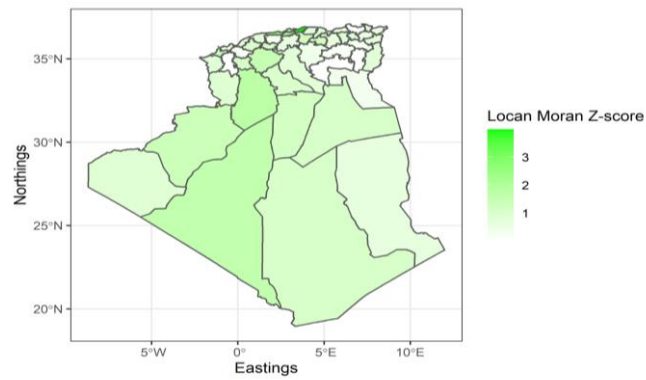
Source : élaboré par les auteurs

Figure (2): Nuage de points de Moran



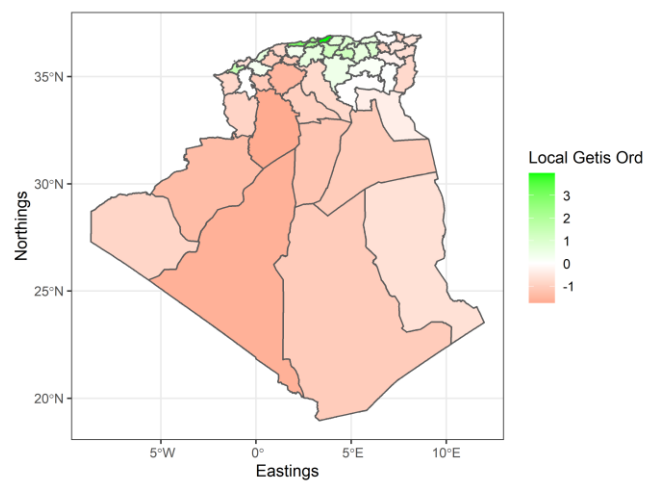
Source: élaboré par les auteurs

Figure (3): Z scores pour Moran local



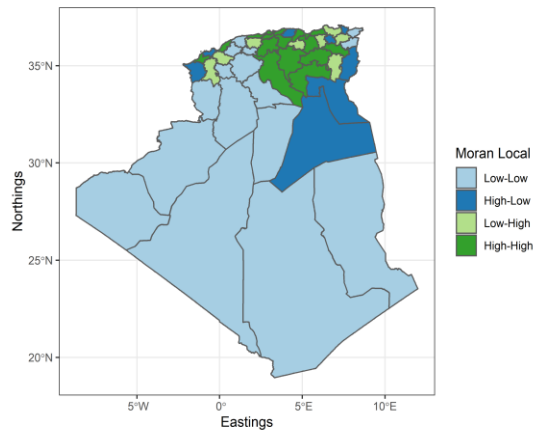
Source: élaboré par les auteurs

Figure (4): Getis Ord local



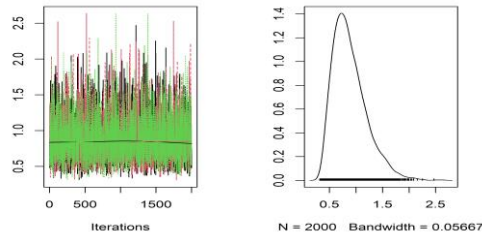
Source: élaboré par les auteurs

(5): La décomposition LISA



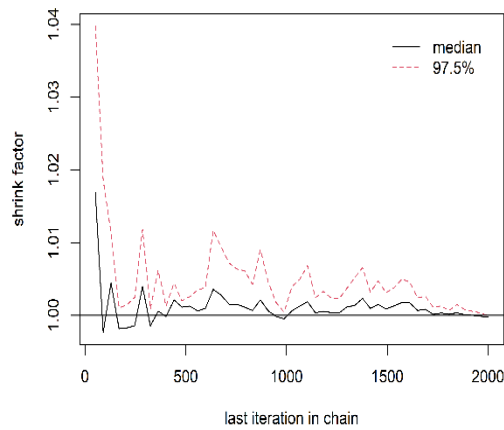
Source: élaboré par les auteurs

Figure (6): Convergence des chaînes



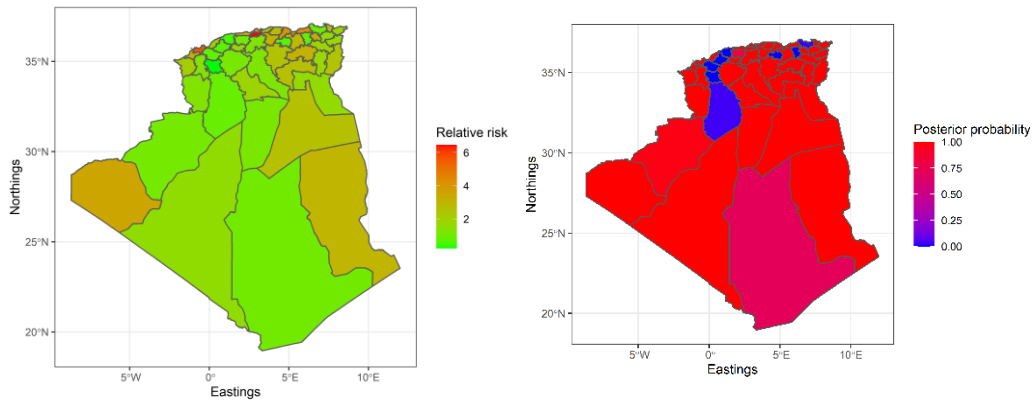
Source: élaboré par les auteurs

Figure (7): Convergence de la chaîne



Source: élaboré par les auteurs

Figure (8): Carte du risque relatif et de la probabilité a posteriori



Source: élaboré par les auteurs

Algorithme (1): Algorithme de Metropolis

Pour $t = 1, \dots, T$ répéter :

1. Générer θ^* de la distribution $q(\cdot | \theta^{(t-1)})$
 2. Calculer le ratio $r = h(\theta^*)/h(\theta^{(t-1)}) = \exp[\log h(\theta^*) - \log h(\theta^{(t-1)})]$
 3. Si $r \geq 1$, poser $\theta^{(t)} = \theta^*$
- Si $r < 1$, poser $\theta^{(t)} = \begin{cases} \theta^* & \text{avec probabilité } r \\ \theta^{(t-1)} & \text{avec probabilité } 1 - r \end{cases}$

Source: (Carlin & Louis, 2009, p. 130)

Algorithme (2) : Algorithme de Langevin-Hastings

Pour $t = 1, \dots, T$ répéter :

1. Générer θ^* d'une distribution Normale Multidimensionnelle $N(\theta^* | \tilde{\mu}(\theta^{(t-1)}), \tilde{\Sigma})$ avec :

$$\tilde{\mu}(\theta^{(t-1)}) = \theta^{(t-1)} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \nabla \log h(\theta^{(t-1)}) \text{ et } \tilde{\Sigma} = \tilde{\sigma}^2 I_k$$

2. Calculer le ratio $r = \frac{h(\theta^*) \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \left\| \theta^{(t-1)} - \theta^* - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \nabla \log h(\theta^*) \right\|^2\right]}{h(\theta^{(t-1)}) \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \left\| \theta^* - \theta^{(t-1)} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \nabla \log h(\theta^{(t-1)}) \right\|^2\right]}$
3. Si $r \geq 1$, poser $\theta^{(t)} = \theta^*$

$$\text{Si } r < 1, \text{ poser } \theta^{(t)} = \begin{cases} \theta^* & \text{avec probabilité } r \\ \theta^{(t-1)} & \text{avec probabilité } 1 - r \end{cases}$$

Source: (Carlin & Louis, 2009, p. 137)

How to cite this article by the APA method:

Ayoub Asri, Cylia Iferroudjene. (2022). Analyse de la distribution spatiale de la mortalité par COVID-19 en Algérie en 2020 : Une approche d'estimation par l'Algorithme de Metropolis-Langevin Ajusté, *Roa Iktissadia Review*, Algeria : University of El-Oued, 12 (02), 149-164.

The copyrights of all papers that were published in this journal are retained by the respective authors as per the [Creative Commons Attribution License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).



Roa Iktissadia Review is licensed under a [Creative Commons Attribution-Non Commercial license \(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)