Fréquence d'estimation de la fonction de volatilité déterministe : Application sur des options d'achat européennes sur l'indice S&P 500

SAHNOUNE Sid Ahmed [*] BENLAIB Boubakeur

Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée -Algérie

تكرار تقدير دالة التقلب الحتمي: دراسة حول خيارات شراء المؤشر S&P 500

سحنون سيد أحمد ، بن العايب بوبكر

المدرسة الوطنية العليا للإحصاء والاقتصاد التطبيقي، الجزائر

Date de réception : 23/07/2018 ; **Date d'acceptation:** 23 /06/2019 ; **Date de publication:** 15/09/2020

Estimation Frequency of the Deterministic Volatility Function: An Application on European Call options on S&P 500

Abstract:

This study aims to confirm if the increase in the estimation frequency of the deterministic volatility function (DVF) of the A-BS model results in a better valuation of S&P500 call options. Therefore, we compared between the valuation errors of single, monthly and weekly estimation frequencies of the model. Our findings show that it is needless to estimate the DVF on a weekly basis for both deep in and in the money call options. On the other hand, weekly estimation frequency is preferable for at the money options.

Keywords: Estimation frequency; Option valuation; Ad hoc Black & Scholes

Jel Classification Codes : C51, C52, C53, C58, G15, G17

Résumé :

Nous nous attèlerons cette étude à vérifier si l'augmentation de la fréquence d'estimation de la fonction de volatilité déterministe (FVD) du modèle ad hoc Black & Scholes (A-BS) aboutit à une meilleure évaluation des options d'achat sur S&P500. A cette fin, nous avons comparé entre les erreurs d'évaluation issues d'une estimation unique, mensuelle et hebdomadaire du modèle. Nos résultats démontrent qu'il n'est pas nécessaire d'opter pour une estimation hebdomadaire pour les options très dans la monnaie et dans la monnaie. En revanche, il est préférable d'utiliser une estimation hebdomadaire pour les options à la monnaie.

Mots-clés : Fréquence d'estimation ; Evaluation d'options ; Ad hoc Black & Scholes

Codes de classification Jel : C51, C52, C53, C58, G15, G17

ملخص:

تهدف هذه الدراسة إلى تأكيد ما إذا كانت الزيادة في تكرار تقدير دالة التقلب الحتمي لنموذج A-BS تؤدي إلى تقييم أفضل لخيارات الشراء لمؤشر S&P500. لذلك، قمنا بمقارنة اخطاء التقييم عند تقدير دالة التقلب الحتمي مرة واحدة، مرة في الشهر، ومرة في الاسبوع. تظهر النتائج التي توصلنا إليها أنه لا داعي لتقديرها على أساس أسبوعي بالنسبة للخيارات الداخلة والداخلة جدا في النقد. اما بالنسبة للخيارات عند النقد فإنه يفضل اعادة تقدير الدالة اسبوعيا.

الكلمات المفتاحية: تكرار التقدير، تقييم الخيارات، آد هوك بلاك-شولز

الترميز الاقتصادي (JEL): C51, C52, C53, C58, G15, G17

I- Introduction

Au cours de ces dernières décennies, les options ont connu un essor considérable, certainement parce qu'elles permettent, en plus de la couverture contre le risque, de dégager des profits plus intéressants que ne le permettent d'autres actifs financiers et ce grâce à l'effet de levier qu'elles procurent. Ce succès a soulevé le problème de leur évaluation ; le premier à s'y être intéressé fut Louis Bachelier en 1900 et depuis, plusieurs tentatives suivirent telles que (Boness, 1964) ou encore (Samuelson, 1965). Mais l'avancée majeure fut le modèle B&S élaboré par (Black et Scholes, 1973), car il était le premier à faire abstraction des préférences des individus et de leur aversion au risque. Ce modèle supposait aussi une volatilité constante et utilisait de ce fait, la volatilité historique comme estimateur de cette dernière .

Or, l'inversion de la formule de B&S, par des méthodes numériques comme la méthode de Newton-Raphson suggérée par (Chriss, 1997), ne conduit pas à l'obtention d'une volatilité constante. (Hull, 2002) argumente que cette volatilité qui devait être sensiblement la même quel que soit le prix d'exercice ou la maturité de l'option, ne l'était plus à cause du crash boursier de 1987. (Rubinstein, 1994) tente d'expliquer ce phénomène par « l'augmentation de la crash-o-phobia », conséquence du crash boursier de 1987 ; la valeur des options en dehors et dans la monnaie est devenue plus grande suite au changement induit par ce crash dans le comportement des investisseurs. Le besoin est ainsi né d'apporter une correction au modèle de Black & Scholes (B&S) comme l'utilisation de la volatilité implicite comme estimateur de la volatilité du sous-jacent, tel que le modèle (A-BS) de (Dumas, Fleming, et Whaley, 1998). Ce modèle présente l'avantage d'utiliser la volatilité implicite jugée par des études comme (Christensen et Prabhala, 1997) entre autres, comme étant un meilleur estimateur de la volatilité que la volatilité historique, grâce à sa liaison avec le prix réel de l'option. Et ce, malgré les critiques d'auteurs tels que (Day et Lewis, 1993) ou (Canina et Figlewsky, 1993) qui ont jugé que la volatilité implicite était un estimateur biaisé de la volatilité et conférait un faible pouvoir prédictif au modèle. Cependant, plusieurs études empiriques telles que (Christoffersen et Jacobs, 2001), (Christoffersen et Jacobs, 2002), ou encore (Berkowitz, 2009) ont démontré la supériorité du modèle A-BS face au modèle de B&S classique .

Ce modèle nécessite, toutefois, une estimation régulière d'une fonction de volatilité déterministe, afin de lisser les volatilités implicites avant de les introduire dans la formule de B&S. Cette ré-estimation est censée améliorer son pouvoir prédictif en y incluant l'information contenue dans les nouvelles observations. Notre objectif est de vérifier si une estimation plus fréquente de cette fonction aboutit à une meilleure évaluation des prix des options d'achat européennes sur l'indice boursier SP500. Ces options ont été retenues car, au-delà du fait qu'elles sont liquides et qu'elles jouissent d'un marché actif, leur sous-jacent est bien représentatif de l'économie américaine et est un bon indicateur de la santé économique, américaine et aussi mondiale.

II– Modèle et méthodologie

Tentant d'exploiter la volatilité implicite issue du modèle de B&S et puisque le smile de volatilité est étroitement liée aux maturités et aux prix d'exercice, (Dumas, Fleming, et Whaley, 1998) ont abandonné l'hypothèse de constance de la volatilité, en faisant dépendre la volatilité implicite en fonction de ces deux facteurs par l'intermédiaire d'une fonction de volatilité déterministe et en l'utilisant ensuite comme intrant dans le modèle de B&S au lieu de la volatilité historique , c'est le modèle ad hoc B&S (A-BS) .

1. Hypothèses du modèle de B&S

Le modèle de B&S repose sur les hypothèses suivantes :

- Taux sans risque (r) connu et constant à travers le temps.
- Il est possible de prêter et d'emprunter sans limitation au taux sans risque.
- Le cours du sous-jacent obéit à un mouvement brownien géométrique :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (1)$$

Avec : dS: variation infinitésimale du cours du sous-jacent pendant un intervalle de temps dt, μ: espérance mathématique du rendement du sous-jacent, S: Cours du sous-jacent, dt: intervalle de temps infinitésimal, σ: écart-type annuel du rendement instantané du sous-jacent, dW: mouvement de Wiener standard : $dW = \varepsilon\sqrt{dt}$ où : $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

- La variance du rendement du sous-jacent est constante.
- Dividendes du sous-jacent nuls.
- L'option est européenne.
- Les coûts de transactions et les impôts n'existent pas.
- Il est possible de vendre à découvert.
- Absence d'opportunités d'arbitrage : il est impossible de profiter des imperfections du marché afin de réaliser un gain à coup sûr.
- Les titres sont divisibles.
- Les marchés sont complets : un produit dérivé peut être synthétisé à partir d'instruments plus basiques.

2. Formule de B&S du prix d'une option d'achat européenne

Afin de déduire l'expression du prix d'une option d'achat européenne (call), l'équation aux dérivées partielles de B&S suivante doit être résolue :

$$\frac{dC(S,t)}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2C(S,t)}{dS^2} + rS\frac{dC(S,t)}{dS} - rC(S,t) = 0 \quad (2)$$

A cette fin il existe différentes approches comme : l'approche neutre au risque, l'approche par les différences finies, l'approche par l'équation de diffusion (équation de la chaleur), …Toutes ces approches aboutissent au même résultat :

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \quad (3)$$

Avec : $d_1 = \frac{ln\frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{t}}$ (4) et $d_2 = \frac{ln\frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$ (5)

C_t : prix call, S_t : cours du sous-jacent à un instant t, K : prix d'exercice de l'option, r : taux sans risque, t : temps en années, τ : temps jusqu'à maturité, σ : volatilité des rendements du sous-jacent.

En inversant la formule de B&S (3), nous obtiendrons un ensemble de volatilités implicites. (Rebonato, 2000) présente la volatilité implicite comme étant : « *le mauvais nombre à introduire dans la mauvaise formule afin d'obtenir le bon prix* ». Cette approche servira de base au modèle A-BS. Cependant et puisque la formule de B&S est une intégrale, il est difficile de l'inverser afin d'en extraire la volatilité implicite. Il est d'usage de recourir donc à des méthodes numériques telles que la méthode de bissection, la méthode récursive ou encore la méthode de Newton-Raphson qui reste la plus utilisée.

3. Modèle ad hoc Black & Scholes

Concrètement ce modèle peut être résumé en ce qui suit:

- Utiliser les données des prix des options en coupe transversale pour une variété de prix d'exercices et de maturités afin d'obtenir un ensemble de volatilités implicites de B&S.
- Choisir la forme de la fonction de volatilité déterministe qui relie la volatilité implicite au prix d'exercice et à la maturité: $\sigma = \beta' X + \varepsilon$, β
- Estimer les paramètres du modèle à l'aide des moindres carrés ordinaires.
- Pour une option de maturité et de prix d'exercice donnés, calculer la volatilité en ajustant la fonction de volatilité déterministe.
- Calculer le prix théorique de cette option en utilisant la volatilité ajustée dans le modèle de B&S.

4. Données et méthodologie

Les données utilisées sont les prix de fermeture quotidiens d'options d'achat européennes sur S&P 500 du 23/10/2014 au 15/01/2015 et issues de datastream, totalisant 3782 observations.

Dans un premier temps, nous avons calculé les volatilités implicites en inversant la formule de B&S à l'aide d'un programme Matlab élaboré par nos soins. Ensuite, nous avons estimé les paramètres de la fonction de volatilité déterministe et cela une seule fois le 23/10/2014 puis à une fréquence mensuelle et enfin à une fréquence hebdomadaire. Enfin, nous avons comparé les performances des différentes estimations à l'aide d'une fonction de perte.

- **Forme de la FVD** : La forme de la FVD retenue est :

$$\sigma(K) = \beta_0 + \beta_1 K + \beta_2 K^2 (6)$$

Avec : β_0, β_1, β_2 les paramètres à estimer et $\sigma(K)$ la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice *K*.

Nous avons opté pour cette forme qui ne tient pas compte des maturités, car d'une part nous ne disposons pas dans notre base de données d'un nombre suffisant de maturités et d'autre part, Dumas, Fleming et Whaley (1998) ont trouvé que la prise en compte des maturités dans la FVD n'aboutissait pas à une amélioration significative des performances du modèle A-BS.

- **Fonction de perte** : Afin de pouvoir comparer entre les différentes estimations, nous avons retenu comme fonction de perte : le pourcentage absolu moyen des erreurs (MAPE) :

$$MAPE = \frac{100}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|C_i^{modèle} - C_i^{marché}\right|}{C_i^{marché}} \quad (7)$$

n : nombre d’options dans la classe, $C_i^{marché}$: prix observé de l’option i, $C_i^{modèle}$: prix théorique de l’option i.

Afin de mieux discerner entre les options étudiées, avons opté pour une classification dynamique, i.e. classification en fonction de la moneyness et non en fonction de leur prix d’exercice :

$$moneyness = \frac{prix\ d'exercice}{cours\ du\ sous - jacent} \quad (8)$$

La classification adoptée est la suivante :

[0,5-0,7[: Options très dans la monnaie.

[0,7-0,9[: Options dans la monnaie.

[0,9-1,1[: Options à la monnaie.

[1,1-1,3[: Options en dehors de la monnaie.

[1,3-1,5] : Options très en dehors de la monnaie.

Les prix d’exercice disponibles dans notre base de données se limitant à 2000, notre étude se limitera par conséquent aux options très dans la monnaie, dans la monnaie et à la monnaie.

III -Résultats et Discussion

Nous remarquons à partir du tableau (1), qu’une fréquence d’estimation hebdomadaire ne surpasse les autres fréquences que pour les options de maturité plus de 60 jours avec un MAPE de l’ordre de 4,76%. Et encore, ces erreurs ne sont que légèrement en deçà des erreurs des autres fréquences d’estimations qui s’élèvent à 5.18% pour chacune d’entre elles. En revanche, pour les autres maturités c’est la fréquence d’estimation mensuelle qui donne les erreurs les plus petites avec 2,79% pour les options ayant une maturité entre 60 jours et 30 jours et 2,81% pour les options de maturité de moins de 30 jours. Nous pouvons de ce fait penser qu’une fréquence d’estimation mensuelle est suffisante en ce qui concerne les options très dans la monnaie.

Nous remarquons à partir du tableau (2) que pour les options de maturité de moins de 60 jours, la fréquence d’estimation unique du modèle donne les erreurs les plus petites avec 10,73% pour les options ayant une maturité entre 60 jours et 30 jours et 13,22% pour les options de maturité de moins de 30 jours. Ces erreurs sont légèrement plus petites que les erreurs de la fréquence d’estimation mensuelle là aussi. En ce qui concerne les options de maturité de plus de 60 jours, la fréquence d’estimation hebdomadaire donne des erreurs légèrement plus petites que les deux autres estimations mais assez proches. Il est donc raisonnable de penser qu’une fréquence d’estimation unique est suffisante pour les options dans la monnaie.

A partir du tableau (3), nous remarquons que la fréquence d’estimation hebdomadaire donne les erreurs les plus petites, sauf pour les options de maturité de moins de 30 jours où c’est la fréquence d’estimation hebdomadaire qui l’emporte. Les erreurs de cette dernière étant très légèrement moindres que ceux de la fréquence d’estimation hebdomadaire, nous pouvons opter pour une estimation hebdomadaire quand il s’agit d’options à la monnaie.

Ainsi, la fréquence d'estimation hebdomadaire n'a été retenue que pour l'évaluation d'options à la monnaie. Une tentative d'explication serait que les options dans et très dans la monnaie ont une valeur intrinsèque non nulle presque certaine, à l'opposé des options à la monnaie qui peuvent vite se retrouver des options en dehors de la monnaie et vice versa selon la fluctuation des cours du sous-jacent et ainsi se retrouver avec une valeur intrinsèque nulle. Il est donc nécessaire pour cette dernière catégorie d'options d'opter pour la fréquence d'estimation la plus fréquente car les options à la monnaie sont très sensibles au contenu informationnel apporté par les fluctuations du cours du sous-jacent

IV- Conclusion

Le modèle A-BS reste un modèle très largement utilisé pour l'évaluation d'options et nécessite une mise à jour fréquente des paramètres. Nous avons comparé entre différentes fréquences d'estimation : estimation unique, mensuelle et hebdomadaire en utilisant le pourcentage absolu moyen des erreurs comme fonction de perte. Cette dernière fréquence n'a pas donné de résultats satisfaisants au regard des deux autres fréquences d'estimation quand il s'agit d'options dans et très dans la monnaie. En revanche, s'agissant des options à la monnaie, nos résultats démontrent qu'une mise à jour hebdomadaire des paramètres du modèle est préférable. Donc, une ré-estimation plus fréquente du modèle est préférable pour des options à la monnaie mais pas nécessaire pour les options dans et très dans la monnaie. Une suite logique de ce travail consistera à inclure les options en dehors et très en dehors de la monnaie, dans la comparaison. Il serait aussi pertinent de vérifier si la prise en compte d'une ré-estimation quotidienne du modèle aboutirait aux mêmes résultats.

Références

Berkowitz, J. (2009). **On Justifications for the d hoc Black-Scholes Method of Option Pricing**. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 14*(1). doi:10.2202/1558-3708.1683

Black, F., et Scholes, M. (1973). **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. *Journal of Political Economy, 81*(3), 637-654. doi:10.1086/260062

Boness, A. J. (1964). **Elements of a Theory of Stock-Option Value**. *Journal of Political Economy, 72*(2), 163-175. doi:10.1086/258885

Canina, L., et Figlewski, S. (1993). **The Informational Content of Implied Volatility**. *The Review of Financial Studies, 6*(3), 659-681. doi:10.1093/rfs/5.3.659

Chriss, N. A., et Chriss, N. (1997). **Black Scholes and Beyond: Option Pricing Models.** McGraw-Hill Companies Incorporated

Christensen, B. J., et Prabhala, N. R. (1998). **The Relation Between Implied and Realized Volatility**. *Journal of Financial Economics, 50*(2), 125-150. doi:10.1016/S0304-405X(98)00034-8

Christoffersen, P., et Jacobs, K. (2002). **Which Volatility Model for Option Valuation?** CIRANO Working Papers 2002s-33, CIRANO, doi:10.1287/mnsc.1040.0276

Christoffersen, P., et Jacobs, K. (2004). **The Importance of the Loss Function in Option Valuation**. *Journal of Financial Economics, 72*(2), 291-318. doi:10.1016/j.jfineco.2003.02.001

Day, T. E., & Lewis, C. M. (1993). **Forecasting Futures Market Volatility**. *Journal of Derivatives, 1*(2), 33-50. doi:10.3905/jod.1993.407876

Dumas, B., Fleming, J., & Whaley, R. E. (1998). **Implied Volatility Functions: Empirical Tests**. *The Journal of Finance, 53*(6), 2059-2106. doi:10.3386/w5500

Hull, J. (2003). **Options, Futures and Other Derivatives: Solutions Manual** (5e ed), Prentice Hall

McDonald RL (2013), **Derivatives Markets** (2e ed), Northwestern University

Rebonato, R. (2004). **Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox**: Wiley

Rubinstein, M. (1994). **Implied Binomial Trees**. *The Journal of Finance, 49*(3), 771-818. doi:doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb00079.x

Samuelson, P. A. (1965). **Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly**. *Industrial Management Review, 6*(2),41-49

Annexes

A- Pourcentage absolu moyen des erreurs selon moneyness et maturité

Tableau 1 : Pourcentage absolu moyen des erreurs selon maturité et fréquence d'estimation – options très dans la monnaie

Maturité	Estimation hebdomadaire	Estimation mensuelle	Estimation unique
90< >60	**4,76%**	5,18%	5,18%
60< >30	9,27%	**2,79%**	2,89%
<30	9,47%	**2,81%**	2,85%

Source : Réalisé par nous même

Tableau 2 : Pourcentage absolu moyen des erreurs selon maturité et fréquence d'estimation – options dans la monnaie

Maturité	Estimation hebdomadaire	Estimation mensuelle	Estimation unique
90< >60	**16,42%**	17,61%	17,61%
60< >30	28,40%	11,71%	**10,73%**
<30	32,07%	13,59%	**13,22%**

Source : Réalisé par nous même

Tableau 2 : Pourcentage absolu moyen des erreurs selon maturité et fréquence d'estimation – options à la monnaie

Maturité	Estimation hebdomadaire	Estimation mensuelle	Estimation unique
90< >60	**14,17%**	17,57%	17,57%
60< >30	**21,75%**	41,50%	35,78%
<30	44,21%	**44,19%**	42,88%

Source : Réalisé par nous même

B- Code Matlab du calcul des volatilités implicites

```
function impvol
load call
load strk
load matu
؛load s0
؛load r
؛load div
؛nbr_strike = size(call,2)
؛mat = size(matu,1)
؛Volatility=zeros(mat,nbr_strike)
for i =1: mat
for j = 1 : nbr_strike
؛Volatility(i,j) = blsimpv(s0, strk(j),r, (matu(i))/252, call(i,j),5,div,0.01)
end
end
save ('IV', 'Volatility')
```

Comment citer cet article par la méthode APA :

SAHNOUNE Sid Ahmed et BENLAIB Boubakeur. (2020), Fréquence d'estimation de la fonction de volatilité déterministe : Application sur des options d'achat européennes sur l'indice S&P 500, **Roa Iktissadia Review,** 10 (02), Algérie : Université Eloued, pp 213-220.