Larhyss Journal, ISSN 1112-3680, n° 05, Juin 2006, pp.139-147

CONTRIBUTION AU CALCUL DE LA PROFONDEUR NORMALE DANS UN CANAL RECTANGULAIRE

B. ACHOUR [1], A. BEDJAOUI [2]

[1] Professeur, [2] Maître-assistant chargé de cours
Laboratoire de recherche en hydraulique Souterraine et de surface – LARHYSS
Université de Biskra, B.P. 145, R.P., 07000, Biskra, Algérie
E-Mail : bachir.achour@larhyss.net, info@larhyss.net

INTRODUCTION

L'application de la formule de *Chézy* au cas de l'écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire mène à une équation de troisième ordre. Sa résolution analytique conduit à l'expression exacte de la profondeur normale, en ayant recours aux fonctions trigonométriques. Cependant, l'évaluation de la valeur requise du coefficient C de *Chézy* demeure encore quasi impossible sans l'aide d'un procédé itératif.
En règle générale, l'emploi des formules usuelles de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts ne permet pas une solution directe au problème du calcul de la profondeur normale.
Dans cette étude, nous montrons, à travers l'exemple du canal rectangulaire, que ce problème peut être aisément résolu par simple application du théorème de *Lagrange*. En outre, une méthode fiable est proposée pour l'estimation directe des coefficients de résistance f de *Colebrook-White*, C de *Chézy* et n de *Manning*, applicable à tous les profils géométriques connus et notamment au profil rectangulaire qui intéresse cette étude.

THEOREME DE *Lagrange*

Etabli en 1770, ce théorème permet d'obtenir la solution d'une équation implicite en termes d'une série infinie. Appliqué pour la première fois par *Swamee* et *Rathie* (2004), il énonce que :
sous certaines conditions, une fonction $f(y)$, où y est la racine de l'équation

$$y = a + \theta\phi(y) \tag{1}$$

dans laquelle a est une constante et θ un paramètre, est donnée par :

$$f(y) = f(a) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\theta^i}{\Gamma(i+1)}\left\{\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}[f'(x)\phi^i(x)]\right\}_{x=a} \tag{2}$$

Dans la relation (2), la fonction Γ est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

et dont les principales propriétés sont :

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)\ ;\ \Gamma(p+1) = p!$$

APPLICATION AU CANAL RECTANGULAIRE

Formule de *Chézy*

La formule de *Chézy* a été proposée en 1768 sous la forme suivante :

$$Q = C\,A\sqrt{R_h\,S_o} \qquad (3)$$

dans laquelle Q est le débit volume écoulé par le canal, C est le coefficient de résistance de *Chézy* exprimé en $m^{1/2}.s^{-1}$, A est l'aire de la section mouillée, R_h est le rayon hydraulique défini comme étant égal au rapport A/P de la section mouillée A au périmètre mouillé P, et enfin S_o est la pente du canal.
Si b est la largeur du canal rectangulaire considéré et y_n est la profondeur normale de l'écoulement, nous pouvons définir la profondeur relative normale ou le paramètre de forme de l'aire de la section mouillée normale par la variable adimensionnelle $\eta_n = y_n/b$.
D'autre part, en considérant les variables Q, b, C et S_o, il est également possible de former le paramètre adimensionnel composé :

$$\overline{C} = Q/(C\,b^{5/2}\sqrt{S_o}\,).$$

L'aire de la section mouillée normale rectangulaire A s'écrit :

$$A = b\,y_n$$

ou bien :

$$A = \eta_n\,b^2 \qquad (4)$$

Le périmètre mouillé P d'une section rectangulaire est donné par :

$$P = b + 2\,y_n$$

soit :

$$P = b(1+2\eta_n) \qquad (5)$$

En combinant les relations (4) et (5), le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit donc:

$$R_h = b\,\frac{\eta_n}{1+2\eta_n} \qquad (6)$$

En substituant les expressions (4) et (6) dans l'équation (3), celle-ci devient :

$$Q = C\,\eta_n\,b^{5/2}\sqrt{\frac{\eta_n}{1+2\eta_n}}\sqrt{S_o}$$

Tenant compte de la définition du paramètre $\overline{C}$, la relation précédente s'écrit plus simplement:

$$\overline{C} = \frac{\eta_n^{3/2}}{\sqrt{1+2\eta_n}} \tag{7}$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (7), nous obtenons l'équation du troisième degré suivante qui exprime implicitement la relation $\eta_n = f(\overline{C})$:

$$\eta_n^3 - 2\eta_n\overline{C}^2 - \overline{C}^2 = 0 \tag{8}$$

L'équation (8) est donc de troisième degré sans terme du second ordre. Son discriminant est :

$$\Delta = \frac{\overline{C}^4}{4}\left(1 - \frac{27}{32}\overline{C}^2\right)$$

L'étude du discriminant Δ, en particulier son signe, montre que deux racines de l'équation (8) ont une signification physique. En effet :

i. Lorsque $\overline{C} \geq \sqrt{27/32}$, alors $\Delta \leq 0$. Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (8) est :

$$\eta_n = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\overline{C}\cos\frac{\beta}{3} \tag{9}$$

où l'angle β est tel que :

$$\cos\beta = \frac{1}{\overline{C}}\sqrt{\frac{27}{32}} \tag{10}$$

ii. Lorsque $\overline{C} \leq \sqrt{27/32}$, alors $\Delta \geq 0$. Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (8) est :

$$\eta_n = \left(\frac{\overline{C}^2}{2}\right)^{1/3}\left[\left(1+\sqrt{1-\frac{32}{27}\overline{C}^2}\right)^{1/3} + \left(1-\sqrt{1-\frac{32}{27}\overline{C}^2}\right)^{1/3}\right] \tag{11}$$

Ainsi, à partir des valeurs connues des variables *Q*, *C*, *b* et S_o, les relations (9), (10) et (11) permettent, de manière explicite, le calcul de la profondeur relative normale $\eta_n = y_n / b$ et donc de la profondeur normale y_n.

Formule de *Manning*

La formule de *Manning* (1891) figure parmi les équations régissant l'écoulement uniforme les plus utilisées dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Le débit volume *Q* est exprimé par :

$$Q = \frac{1}{n}AR_h^{2/3}\sqrt{S_o} \tag{12}$$

Le coefficient *n* est le coefficient de rugosité *Manning* et dont la valeur est étroitement liée à celle du coefficient *k* de *Strickler* puisque $n = k^{-1}$.

A partir des variables Q, b, n et S_o, il est également possible de former le paramètre adimensionnel composé :

$$M = nQ/(b^{8/3}\sqrt{S_o})$$

En considérant les expressions (4) et (6) et en tenant compte de la définition du paramètre adimensionnel M, la relation (12) s'écrit plus simplement :

$$M = \frac{\eta_n^{5/3}}{(1+2\eta_n)^{2/3}} \tag{13}$$

Au regard de la forme de la relation (13), il apparaît clairement que la fonction $\eta_n(M)$ ne peut guère s'exprimer sous une forme explicite. En élevant à la puissance 3/5 les deux membres de l'équation (13), nous pouvons écrire :

$$\eta_n = M^{3/5}(1+2\eta_n)^{2/5} \tag{14}$$

En procédant à l'identification des équations (1) et (14), nous pouvons aisément déduire que :

$$y = \eta_n,\ a = 0,\ \theta = M^{3/5},\ \phi(y) = (1+2\eta_n)^{2/5}$$

Ainsi, avec $f(y) = y$, la relation (2) devient :

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M^{3i/5}}{\Gamma(i+1)} \left\{ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [(1+2x)^{2i/5}] \right\}_{x=0} \tag{15}$$

Après un calcul assez laborieux et après avoir procédé à quelques simplifications, l'équation (15) mène à :

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}M^{3i/5}}{\Gamma(i+1)} \frac{\Gamma[(2i/5)+1]}{\Gamma[(-3i/5)+2]} \tag{16}$$

ou bien à :

$$\eta_n = M^{3/5} + \frac{4}{5}M^{6/5} + \frac{4}{5^2}M^{9/5} - \frac{16}{5^3}M^{12/5} - \frac{4}{5}M^{15/5} + \frac{896}{5^6}M^{18/5} + \ldots \tag{17}$$

L'équation (17) donne ainsi une solution explicite au calcul de la profondeur relative normale η_n, sachant que $M(Q,\ n,\ b,\ S_o)$ est la variable connue du problème. Selon la précision voulue par le projeteur, le calcul de η_n, en vertu de la relation (17), peut être arrêté à la valeur fixée de l'ordre i.

CALCUL EXPLICITE DU COEFFICIENT DE RESISTANCE

Coefficient de *Chézy*

En dépit du fait que la formule de *Colebrook-White* ait été établie en conduite, elle semble être cependant fort intéressante lorsqu'elle est appliquée aux canaux ouverts (*Chow*, 1973; Sinniger et Hager, 1989). Cette formule exprime le coefficient de résistance *f* comme étant :

$$f^{-1/2} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{14{,}8R_h} + \frac{2{,}51}{R\sqrt{f}}\right) \tag{18}$$

Dans la relation (18), R désigne le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement et ε est la rugosité absolue des parois du canal considéré. Le nombre de *Reynolds* R s'exprime par :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \tag{19}$$

où ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Il est important de signaler que le nombre de *Reynolds* R ne peut être évalué puisque la profondeur normale y_n est le paramètre inconnu du problème. C'est d'ailleurs le paramètre que l'on cherche à déterminer dans la présente étude.
Achour et Bedjaoui (2006) montrent que la relation (18) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon / R_h^*}{14{,}8\psi} + \frac{10{,}04}{\psi^{3/2}R^*}\right) \tag{20}$$

où R_h^* est le rayon hydraulique correspondant à un écoulement en régime turbulent rugueux caractérisé par une rugosité relative $\varepsilon^*/R_h^*=0{,}148$ équivalente à un coefficient de *Chézy* $C^* = 8\sqrt{2g}$, R^*est le nombre de *Reynolds* caractérisant cet écoulement et enfin ψ est un paramètre sans dimension qui s'exprime par (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$\psi = 1{,}35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon / R_h^*}{19} + \frac{8{,}5}{R^*}\right)\right]^{-2/5} \tag{21}$$

Les équations (20) et (21) sont applicables pour toutes les valeurs de $R \geq 2300$ et pour la large gamme $0 \leq \varepsilon/R_h \leq 0{,}20$.
Compte tenu du fait que le coefficient C de *Chézy* soit lié au coefficient de frottement f par la relation $C = \sqrt{8g/f}$, il est alors aisé de montrer que :

$$C = -4\sqrt{2g}\,\log\left(\frac{\varepsilon / R_h^*}{14{,}8\psi} + \frac{10{,}04}{\psi^{3/2}R^*}\right) \tag{22}$$

Coefficient de *Manning*

L'expression du coefficient n de *Manning* peut être déduite de la relation générale de l'écoulement uniforme établie par Achour et Bedjaoui (2006), applicable à tous les profils géométriques de canaux et de conduites. Celle-ci se présente sous la forme suivante :

$$Q = -4\sqrt{2}\,A\sqrt{R_h S_o}\,\log\left(\frac{\varepsilon / R_h}{14{,}8} + \frac{10{,}04}{R^*}\right) \tag{23}$$

En comparant les relations (3) et (12), nous pouvons déduire que :

$$n = C^{-1} R_h^{1/6} \tag{24}$$

Le rayon hydraulique R_h peut s'écrire selon Achour et Bedjaoui (2006) :

$$R_h = \psi R_h^* \tag{25}$$

En substituant les relations (22) et (25) dans l'équation (24), le coefficient de résistance (ou de rugosité) *n* de *Manning* est alors :

$$n = \left[-\frac{4\sqrt{2g}}{\left(\psi R_h^*\right)^{1/6}} \log\left(\frac{\varepsilon / R_h^*}{14{,}8\psi} + \frac{10{,}04}{\psi^{3/2} R^*} \right) \right]^{-1} \tag{26}$$

CALCUL DE LA PROFONDEUR RELATIVE NORMALE

Formule de Chézy

Pour calculer la profondeur relative normale à partir des équations (9) et (11), il est nécessaire d'évaluer le paramètre $\overline{C}$ et donc le coefficient *C* de *Chézy*. Les étapes suivantes sont recommandées pour une démarche correcte du calcul, à partir des valeurs connues des paramètres Q, b, S_o, ε et ν :

i. Connaissant la valeur des paramètres Q, b, S_o et sachant que $C^* = 8\sqrt{2g}$, la variable adimensionnelle $\overline{C}^* = Q/(C^* b^{5/2} \sqrt{S_o})$ est alors calculée.

ii. Pour $\overline{C} = \overline{C}^*$, les relations (9), (10) et (11) donnent la valeur de la profondeur relative normale η_n^* dans l'hypothèse d'un régime d'écoulement turbulent rugueux.

iii. A partir des valeurs ainsi connues de b et de η_n^*, les relations (5) et (6) permettent de calculer le périmètre mouillé P^* et le rayon hydraulique R_h^* respectivement.

iv. Les valeurs connues de Q, P^* et ν permettent le calcul aisé du nombre de *Reynolds* R^* en application de la relation (19).

v. En considérant les valeurs connues des paramètres R_h^*, R^* et ε, la relation (21) donne la valeur correspondante de la variable adimensionnelle ψ.

vi. En substituant les valeurs de R_h^*, R^*, ε et ψ, le coefficient *C* de *Chézy* est alors déduit de la relation (22).

vii. Les relations (9), (10) et (11) donnent la valeur recherchée de la profondeur relative normale η_n, après avoir évalué le paramètre adimensionnel $\overline{C} = Q/(C b^{5/2} \sqrt{S_o})$.

Formule de *Manning*

Pour calculer la profondeur relative normale à partir de la relation (17), il est nécessaire d'évaluer le paramètre M et donc le coefficient n de *Manning*. Comme l'indique la relation (26), le coefficient n de *Manning* dépend des caractéristiques de l'écoulement turbulent rugueux et nous pouvons écrire que $n = \varphi(R_h^*, R^*, \varepsilon)$. D'autre part, en appliquant la relation (24) à l'écoulement turbulent rugueux considéré, il est alors évident que :

$$n^* = C^{*-1} R_h^{*1/6} \tag{27}$$

En tenant compte du fait que $C^* = 8\sqrt{2g}$, la relation (27) devient donc :

$$n^* = \frac{R_h^{*1/6}}{8\sqrt{2g}} \tag{28}$$

En outre, l'application au régime turbulent rugueux de la relation (12) de *Manning* mène à écrire que :

$$Q = \frac{1}{n^*} A^* R_h^{*2/3} \sqrt{S_o} \tag{29}$$

Selon les relations (4) et (6), l'aire de la section mouillée A^*et le rayon hydraulique R_h^*s'écrivent respectivement :

$$A^* = \eta_n^* b^2 \tag{30}$$

$$R_h^* = b \frac{\eta_n^*}{1 + 2\eta_n^*} \tag{31}$$

En substituant les relations (28), (30) et (31) dans l'équation (29), le résultat suivant est obtenu :

$$\eta_n^{*3} - 2\eta_n^* \overline{M}^{*2} - \overline{M}^{*2} = 0 \tag{32}$$

où le paramètre adimensionnel $\overline{M}^*$ est donné par :

$$\overline{M}^* = Q / (8\sqrt{2g}\, b^{5/2} \sqrt{S_o}\,) \tag{33}$$

Au regard des relations (32) et (33), il est intéressant de noter que :

i. La relation (32) indique que la profondeur relative normale η_n^* est liée au paramètre $\overline{M}^*$ par une équation de troisième ordre.

ii. Les formes des équations (8) et (32) sont identiques et nous pouvons écrire par identification que $\overline{M}^* = \overline{C}^*$.

iii. Les solutions de l'équation (32) sont données par les relations (9), (10) et (11) pour $\overline{C} = \overline{C}^* = \overline{M}^*$.

Ainsi, il est possible de mener le calcul de la profondeur normale, basé sur la relation (17), selon les étapes suivantes :

i. Connaissant la valeur de Q, b, S_o et sachant que $C^* = 8\sqrt{2g}$, le paramètre adimensionnel $\overline{M}^* = \overline{C}^* = Q/(C^* b^{5/2}\sqrt{S_o})$ est alors calculé.

ii. Pour $\overline{C} = \overline{C}^* = \overline{M}^*$, les relations (9), (10) et (11) donnent la profondeur relative normale η_n^* dans l'hypothèse d'un régime d'écoulement turbulent rugueux.

iii. A partir des valeurs ainsi connues de b et de η_n^*, les relations (30) et (31) permettent de calculer respectivement l'aire de la section mouillée A^* et le rayon hydraulique R_h^*. La valeur du périmètre mouillé $P^*=A^*/R_h^*$ peut alors être déduite immédiatement.

iv. Les valeurs connues de Q, P^* et ν permettent de déduire celle du nombre de *Reynolds* R^* en application de la relation (19).

v. Le paramètre adimensionnel $\psi(R_h^*,R^*,\varepsilon)$ est ensuite calculé en application de la relation (21).

vi. En substituant les valeurs connues de R_h^*, R^*, ψ et ε dans la relation (26), la valeur recherchée du coefficient de résistance n de *Manning* est alors déterminée.

vii. Le paramètre adimensionnel composé $M = nQ/(b^{8/3}\sqrt{S_o})$ est ainsi bien défini pour les valeurs données de n, Q, b et S_o.

viii. Finalement, la profondeur relative normale $\eta_n(M)$ est déterminée en application de la relation (17).

CONCLUSION

Les relations usuelles de l'écoulement uniforme ne permettent pas en règle générale le calcul explicite de la profondeur normale.
Lorsque la relation de *Chézy* est appliquée au canal rectangulaire, la profondeur relative normale est alors régie par une équation de troisième ordre dont la résolution analytique est connue. Cependant, le calcul de cette profondeur relative normale n'est pas possible sans avoir recours à une formulation supplémentaire pour le coefficient C de *Chézy*.
Pour tous les profils géométriques connus, notre étude a montré, a travers l'exemple du canal rectangulaire, la possibilité d'un calcul explicite de la profondeur relative normale, basé sur le théorème de *Lagrange*. La solution du problème est alors donnée en termes d'une série infinie.
L'une de nos contributions a bien été de proposer des relations explicites au calcul des coefficients de résistance de l'écoulement, notamment les coefficients de rugosité de *Chézy* et de *Manning*. Lorsqu'elles sont associées au théorème de Lagrange, ces relations permettent la solution directe au problème que pose le calcul de la profondeur normale.

NOTATION

A	aire d'une section mouillée
b	largeur d'un canal rectangulaire
C	coefficient de rugosité de *Chézy*
$\overline{C}$	paramètre adimensionnel égal à $\overline{C} = Q/(C b^{5/2} \sqrt{S_o})$
f	coefficient de frottement au sens de *Colebrook-White*
g	accélération de la pesanteur
k	coefficient de rugosité de *Strickler*
M	paramètre adimensionnel égal à $M = nQ/(b^{8/3} \sqrt{S_o})$
$\overline{M}^*$	paramètre adimensionnel égal à $\overline{M}^* = Q/(8\sqrt{2g}\, b^{5/2} \sqrt{S_o})$
n	coefficient de rugosité de *Manning*
Q	débit volume
R_h	rayon hydraulique
R_h^*	rayon hydraulique (écoulement turbulent rugueux)
S_o	pente d'un canal
y_n	profondeur normale

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2006, to be published). "Discussion of 'Exact Solutions for Normal Depth Problem' by Prabatha, K. Swamee, Pushpa N. Rathie". *J. Hydraul. Res*., *IAHR*.

CHOW, V.T. (1973). Open Channel Hydraulics, McGraw Hill, NY.

MANNING, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes. Transactions, Institution of Civil Engineers of Ireland, Vol. 20, pp. 161-207, Dublin.

SWAMEE, P., K., RATHIE, N. (2004). Exact Solutions for Normal Depth Problem, *J. Hydraul. Res*., *IAHR* 42(5), 541-547.

SINNIGER, R., HAGER, W.H. (1989). Constructions Hydrauliques, *Ecoulement stationnaire*, Presses Polytechniques Romandes, Vol. 15, Lausanne.