

# Réponse dynamique d'une structure rail sur appuis continus sous l'effet d'une source mobile par superposition des ondes de bloch

M Lecheheb<sup>1\*</sup> and R Lassoued<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire des matériaux et durabilité des constructions  
Département de génie civil, faculté des sciences de l'ingénieur  
Université des frères Mentouri I, Constantine, Algérie

**ABSTRACT:** This paper describes an analytical resolution of vibration eigen waves for a rail structure under the influence of a mobile source, the rail is modeled as an infinite Euler beam placed on elastic and periodic supports.

The use of the Bloch transform makes it possible to recombine the overall response of the system between two elastic supports, using the summation on the modes. The analytical resolution of the sum of two geometric series to account for the influence of all supports from  $-\infty$  to  $+\infty$  was realized. The evaluation of the Bloch transform allows the decomposition of the system. The resolution of the equation of motion makes it possible to determine the dynamic response of the periodic structure under the effect of a mobile source.

To determine the dynamic response for any rail span, we have applied the Floquet theory. For this purpose the theory is applied to find the displacement of the supports, and also the displacement of the span as a function of the displacement of the 1st span.

Matlab computing codes have been developed in this direction. All the analysis is carried out in dimensionless variables.

**Keywords:** Rail, mobile source, Green Function, Bloch waves, Floquet Theory.

**RESUME :** Cet article décrit une résolution analytique des ondes propres de vibration pour une structure rail sous l'influence d'une source mobile, le rail est modélisé comme poutre Euler infinie posée sur des appuis élastique et périodique.

L'utilisation de la transformée de Bloch permet de recomposer la réponse globale du système entre deux appuis élastiques, en utilisant la sommation sur les modes. La résolution analytique de la sommation de deux séries géométrique afin de tenir compte de l'influence de tous les appuis de  $-\infty$  à  $+\infty$  a été réalisée. L'évaluation de la transformée de Bloch permet la décomposition du système. La résolution de l'équation du mouvement permet de déterminer la réponse dynamique de la structure périodique sous l'effet d'une source mobile.

Pour déterminer la réponse dynamique pour une travée quelconque du rail, nous avons appliqué la théorie de Floquet. Pour cela on applique la théorie pour trouver le déplacement des appuis, et aussi le déplacement de la travée en fonction du déplacement de 01<sup>ère</sup> travée.

Des codes de calcul sous environnement Matlab ont été réalisés dans ce sens. Toute l'analyse est menée en variables adimensionnelles.

**MOTS CLES :** Rail, Charge Mobile, Fonction de Green, Ondes de Bloch, Théorie de Floquet.

## 1. Introduction :

Les trains modernes (comme le TGV en France ou l'ICE en Allemand,...) peuvent se déplacer avec des vitesses très élevées et les effets dynamiques dus à leur mouvement sur le rail et le support ne sont pas négligeables. En outre il y a un besoin d'évaluer le bruit induit par vibration.

\* Corresponding author.

E-mail: [lecheheb\\_m@hotmail.com](mailto:lecheheb_m@hotmail.com) (Lecheheb X.).

Address: Université des frères Mentouri I, Constantine, Algérie.

Le cas d'un rail attaché sur des supports espacés de même longueur, est modélisé comme poutre infinie posée sur appuis périodique, a été intensivement étudié dans la dynamique linéaire et non linéaire.

Les structures périodiques sont étudiées depuis longtemps, mais l'histoire a été tracée par L. Brillouin [1] (il y décrit de manière analytique la propagation des ondes élastiques, électromagnétiques et électroniques dans les réseaux), avant, Newton a étudié la propagation du son dans l'air il a conclu que le son se propage dans l'air comme une onde élastique dans un réseau périodique de masses-ressorts. Ceux-ci étaient suffisants pour permettre l'élaboration des idées de propagation de l'onde libre dans de telles structures. Des analyses de vibration de ces structures sont fréquemment exigées, et des études étendues de leurs mouvements harmoniques libres ont été effectuées au cours des 40 dernières années.

Une partie de ce travail sur le mouvement libre d'onde dans les structures qui est approprié aux thèmes de cet article est contenue dans les références [1-8].

La méthode utilisée pour obtenir la réponse dynamique sous charge mobile comprend le calcul des matrices de transfert [9][10][11][12], l'utilisation d'ondes Bloch [13] [14] et des solutions à éléments finis [15][16].

En 1981 Munjal et Heckl [9], ont idéalisé Le système «rail-support » par une poutre périodique infinie soumise à une force oscillatoire. Celle-ci génère quatre ondes, deux se déplaçant vers la droite et les deux autres vers la gauche. Les constantes de propagation sur toute la gamme de fréquence sont déterminées.

Nordborg [14] utilise La transformée de Fourier, le théorème de Floquet ainsi que la fonction de Green (poutre libre) pour la résolution de l'équation différentielle régissant le comportement dynamique. La poutre est simulée par une poutre d'Euler dont les appuis périodiques sont flexibles. La solution est déterminée dans le domaine fréquentiel.

Belostserkovkiy [17-19] considère une travée entre deux supports qui sont censé idéaliser la poutre rail infinie. Il y applique des conditions aux limites appropriées afin de résoudre l'équation différentielle régissant le comportement de la poutre. L'utilisation de deux approches (celle de Mead et celle de l'auteur résolu précédemment) lui permet de résoudre le problème. Cependant il est indiqué de modéliser la structure comme une poutre de Bernoulli, particulièrement pour la vibration latérale du rail. Plus tard, il complète son étude en s'intéressant à des forces sous forme d'impulsions instantanées (Belotsekovskiy, 1999) [17]. En 2002[18] il évalue la réponse dynamique d'une poutre infinie simulée par une poutre de Timoshenko sur appuis viscoélastiques, les forces d'interaction étant pris en compte. Mais la poutre est toujours discrétisée entre deux appuis adjacents. Puis en 2004 [19], il étudie à nouveau l'interaction entre les roues, régulièrement espacées, d'un train supposé infini roulant sur une voie modélisée par une poutre de Timoshenko infinie.

En 1990, Mead et Yaman [22] ont développé Une approche afin d'analyser la réponse harmonique d'une poutre infinie, uniforme sur appuis multiple. La poutre est excitée par une force unique ou multiple. Les équations présentées sont relatives à différents types de supports. Les effets d'amortissement peuvent être pris en compte. Plus tard, en 1991[23], les auteurs analysent la même structure, mais soumise à une force transversale harmonique. La réponse globale correspond à la somme des ondes de flexion générées par les forces appliquées

Pour la poutre de Timoshenko, Maria A.Heckl [24], présente un modèle mathématique sur la propagation des ondes dans les structures infinies, le modèle présente plusieurs types d'appuis, poutre avec support massique et poutre avec support rigide, l'étude fait sur la

déformation d'une poutre pour toutes les directions (modèle (3d)), dans l'emplacement de la fonction de Green il y a la matrice  $3 \times 3$  de la fonction de Green qui représente la réponse dans les trois directions (latéral, vertical, et axial), les éléments de la fonction de Green sont calculés par le principe de Hamilton.

J.F. Hamet [25] présente et compare deux modélisations du comportement vibratoire d'un rail posé sur traverses (blochets) basées respectivement sur deux modélisations du rail : celle de la poutre mince (Euler) et celle de la poutre épaisse (Timoshenko). Pour chaque modélisation, l'équation différentielle du mouvement, les phénomènes de propagation et la réponse à une force extérieure ponctuelle est abordés et analysés.

Lassoued. R, Lecheheb. M, Bonnet, G [26] ont été décrits le calcul du champ d'onde provoquée par une charge mobile d'une poutre sur support périodique. Le champ d'onde est obtenu par la décomposition par les ondes de Bloch. La résolution du problème homogène conduit à l'équation de dispersion, aux ondes de Bloch et les bandes d'ondes. Les ondes de Bloch et les courbes de dispersion contient toute la physique du problème dynamique et le champ d'onde induite par une charge dynamique appliquée au système est alors obtenu par une décomposition en ondes de Bloch, même à la décomposition d'habitude dans les modes dynamiques sur une structure finie. La méthode est appliquée pour obtenir le champ induit par une charge se déplaçant à vitesse constante sur une poutre mince appuyé par des supports élastiques périodiques.

Pour les poutres a plusieurs travées. Wu et Dai (1987) ont étudié la réponse d'une poutre non uniforme pour plusieurs travées soumis à une série Des charges qui se déplacent avec une vitesse variable dans les mêmes sens et dans des directions opposées.

Mead (1986) détermine la fonction réponse pour une structure infinie, uniforme, unidimensionnelle, soumise à des forces ou moments harmoniques, régulièrement espacés. Il met au point une équation générale pour déterminer les constantes de propagation et la réponse dynamique de la structure considérée, cette méthode (qui semble plus simple que les précédentes) a pu être appliquée afin d'étudier :

- Une poutre de Timoshenko sur appuis périodiques.
- Une plaque parallèle sur appuis périodiques de types poutres.

L'objectif du document est de produire la réponse d'une poutre sur appuis périodiques soumis à une charge mobile, en utilisant la transformée Bloch Allaire [27], Sanchez [28]. Des parties de la solution sont semblables à celles utilisées par Langley [29] pour les structures 2D ou Hamet [30] pour la poutre de Timoshenko soumis à une charge dynamique (non mobile), et les démarches sont les mêmes avec [26]. Après nous aurons appliqué le théorème de Floquet [20] pour trouver la réponse dynamiques pour n'importe qu'elle travée de la poutre infinie.

## 2. la réponse de la poutre soumise à une charge mobile

La voie est modélisée par une poutre (rail) infiniment longue, posée sur des appuis périodiques présentée dans la figure (1), la poutre est modélisée comme poutre d'Euler où l'espacement entre les appuis est fixe égale à  $l$ .

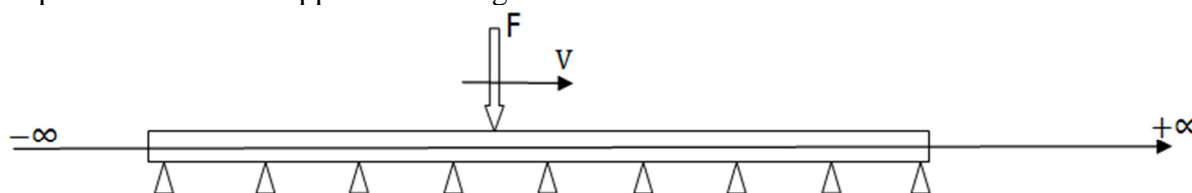


Figure 1. Rail sur appui périodique sous l'influence d'une source mobile

Le déplacement vertical  $y(x,t)$  de la poutre sous l'action d'une force vertical  $F(x,t)$  est la solution de l'équation dynamique pour la poutre :

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - F(x,t) = 0 \quad (1)$$

$m$  : Masse linéique du rail ;

$E$  : module de Young.

L'utilisation les mêmes démarches que [26] permettent la résolution de cette équation et de trouver le transforme de fourrier et le transforme de bloch :

$$mw_n^2 \hat{y}_n(K^*, t) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{y}_n(K^*, t) = \hat{F}_n(K^*, t) \quad (2)$$

Cette équation est identique à l'équation permettant de calculer les composantes temporelles de chaque mode en calcul modale des structures. C'est une équation différentielle deuxième ordre avec second membre représentée par la composante verticale de la force extérieure.

Le transforme de Bloch de  $F(t)$  est :

$$\hat{F}_n(K^*, t) = \bar{\eta}_n(X^* = Vt \frac{2\pi}{l}, K^*) F_0 \frac{2\pi}{l} \quad (3)$$

Les composants de Bloch du déplacement induit par la charge mobile sont donc des solutions de l'équation suivante:

$$mw_n^2 \hat{y}_n(K^*, t) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{y}_n(K^*, t) = \bar{\eta}_n(X^* = Vt \frac{2\pi}{l}, K^*) F_0 \frac{2\pi}{l} \quad (4)$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$\hat{y}_n(K^*, t) = \frac{2\pi F_0}{l} \left[ \frac{e^{-2i\pi K^*} \sin(k_b Vt) - \sin(k_b (Vt-l))}{\gamma_1 [\cos(k_b l) - \cos(2\pi K^*)]} - \frac{e^{-2i\pi K^*} \sinh(k_b Vt) - \sinh(k_b (Vt-l))}{\gamma_2 [\cosh(k_b l) - \cos(2\pi K^*)]} \right] \quad (5)$$

Avec les valeurs de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont :

$$\gamma_1 = m(w_n^2 - k_b^2 V^2) \quad (6)$$

$$\gamma_2 = m(w_n^2 + k_b^2 V^2) \quad (7)$$

Cette solution peu transformer par l'utilisation des nouveaux variables  $T, X, B, K$  définir par  $x = X.l, t = T.l/V, k = K/l, k_b = B/l$ .

On utilise ces variables,  $y$  devient :

$$y(X, T) = \frac{F_0}{\pi \beta l} \sum_n \int_{K=0}^{\pi} \frac{P}{\alpha_1 \alpha_2 Q} dK \quad (8)$$

Où

$$\alpha_1 = B^4 - B^2 \phi \quad (9)$$

$$\alpha_2 = B^4 + B^2 \phi \quad (10)$$

$$\phi = \frac{m.V^2 l^2}{EI} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{EI}{l^4} \quad (12)$$

Où  $P$  et  $Q$  sont donnée dans [26].

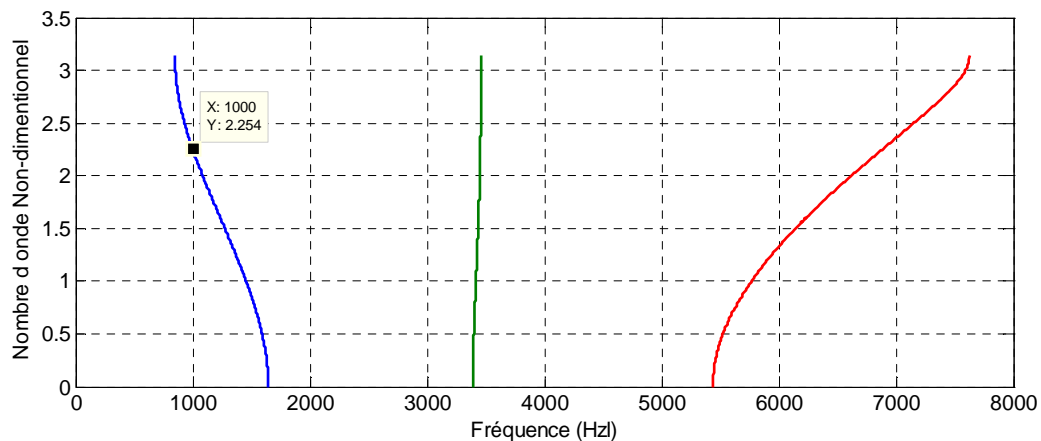
La relation entre le nombre d'onde  $k_b$  et le vecteur d'onde  $s$  s'exprimée en utilisant les quantités adimensionnels

$$1 + \frac{\delta}{B^3} \left[ \frac{\sin(B)}{\cos(B) - \cos(K)} - \frac{\sinh(B)}{\cosh(B) - \cos(K)} \right] = 0 \quad (13)$$

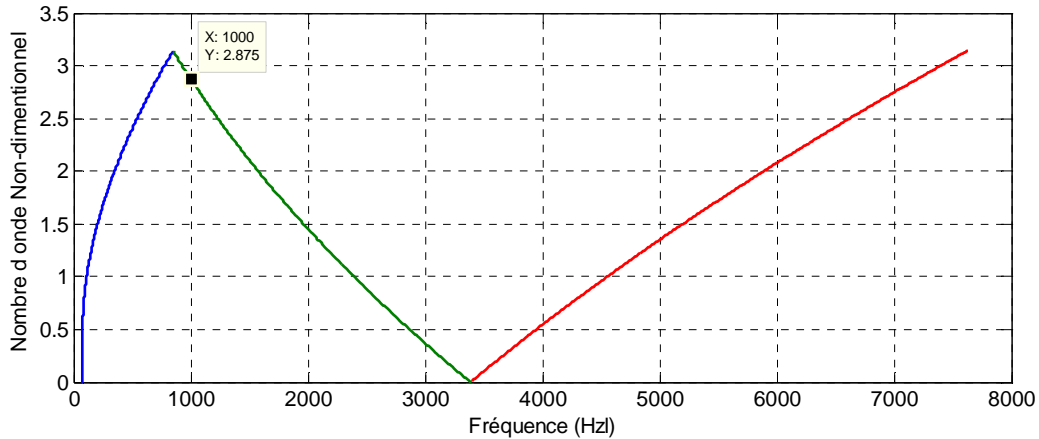
Où le paramètre non-dimensionnel s'écrit :

$$\delta = \frac{l^3 Z}{4EI} \quad (14)$$

L'équation de dispersion (13), nous permet de calculer le nombre d'onde adimensionnel en fonction de la fréquence.



(2.a). supports élastiques  $s_y = 3e10$



(2.b). supports élastiques  $s_y = 2e7$

**Figure 2. Courbe de dispersion pour les trois premières bandes**

La figure 2, montre les courbes de dispersion pour les trois bandes passantes pour des supports élastiques très rigides (2.a), et des supports élastiques moins rigides (2.b).

Nous pouvons conclure le nombre d'onde adimensionnel en fonction de la fréquence et le type du support, par exemple pour la fréquence 1000Hz, le nombre adimensionnel d'onde  $K = 2,254$  pour  $s_y = 3e10$ , et  $K = 2,875$  pour  $s_y = 2e7$ .

### 3. La réponse dynamique pour deux travées :

Nous supposons une poutre infinie posée sur des appuis périodiques infinis (de  $-\infty$  à  $+\infty$ ), la charge mobile est considérée entre l'appui 0 et l'appui 1, pour trouver le déplacement dans n'importe qu'elle travée sous l'influence de cette force, nous avons obligées de calculer le déplacement dans la travée adjacente de la travée porter la force mobile.

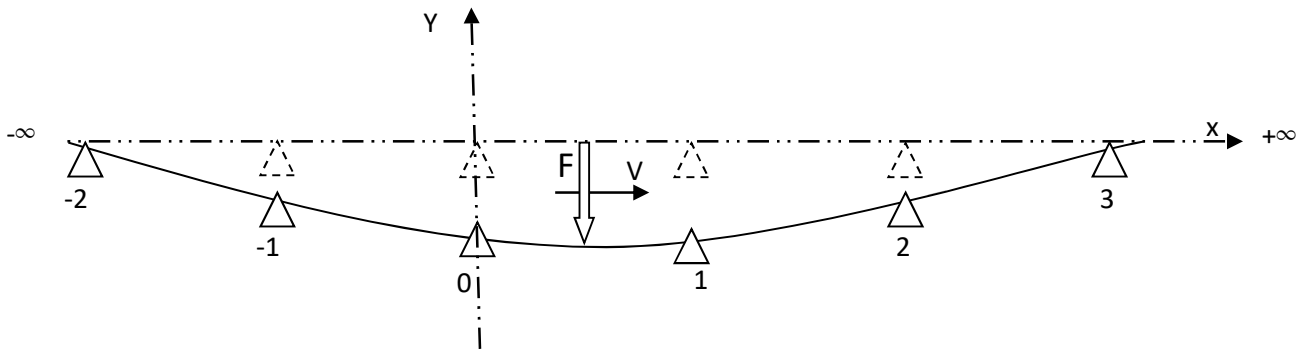


Figure (1) : Poutre infinie sur appuis périodique sous charge mobile

Il est plus efficace de considérer un rail infini et d'utiliser les propriétés du théorème de Floquet [Hamet].

Mead [1975] montre que des ondes libres peuvent se propager sur un système périodique uniquement pour certaines gammes de fréquences (bandes de Bloch), les deux figures () et () nous montrent les bandes passantes (bandes de Bloch) en fonction des caractéristiques physiques du rail et du support.

L'application de la théorie de Floquet nous permet de trouver le déplacement dans n'importe point et n'importe travée dans la poutre infinie.

Donc ; on peut écrire :

$$y(x + n.l) = (-1)^n . y(x) . e^{-n.K.l} \tag{15}$$

Ou :

$y(x)$  Le déplacement pour la 01<sup>ère</sup> travée et il est connu;

$K$  est le nombre d'onde adimensionnel;

$l$  : L'espace entre deux appuis ;

$n$  : Le nombre de la travée.

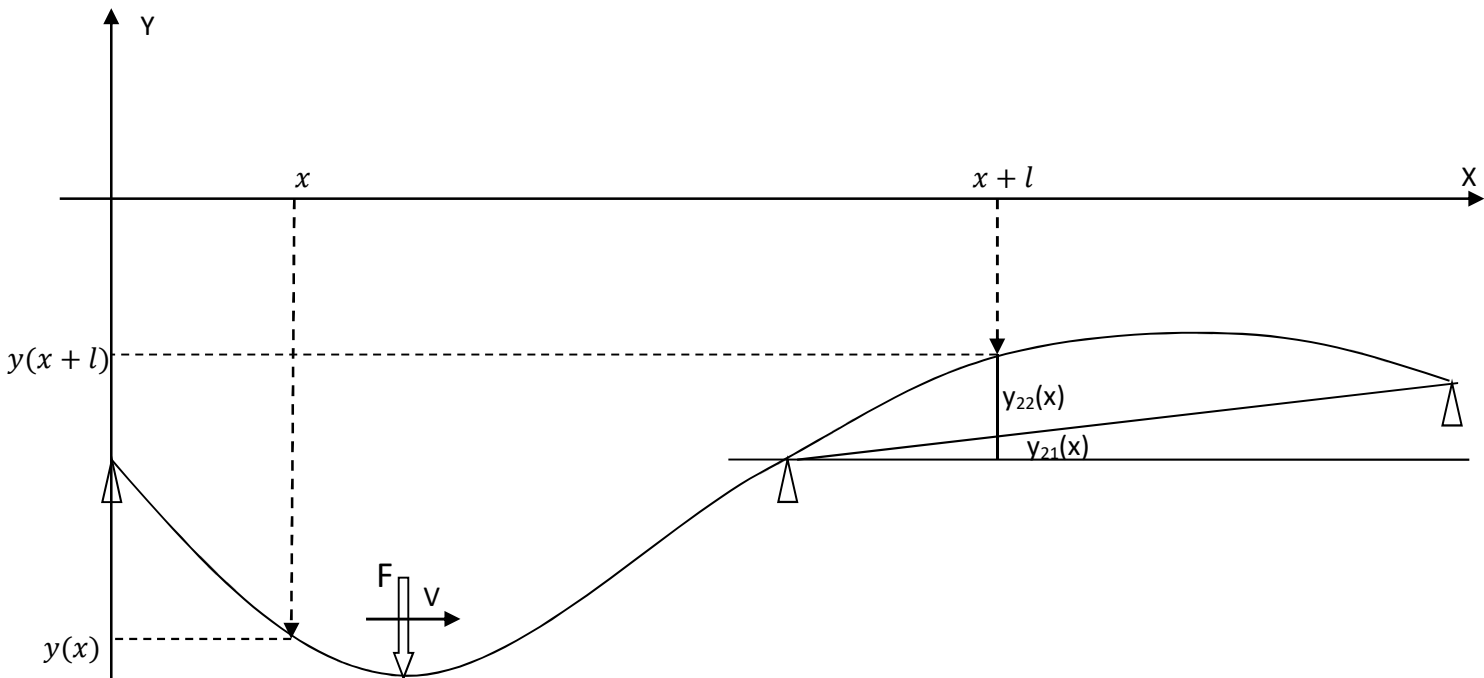
Pour le déplacement des appuis :

$$Y_{(n+1)} = y_1 . e^{-n.K.l} \tag{16}$$

Où  $y_1$  le déplacement pour l'appui N°01, et il est connu.

Les conditions aux limites :

$$y_n(l) = y_{n-1}(0), \text{ ou } y((n.l) + \varepsilon) = y((n.l) - \varepsilon) = y(n.l) \tag{17}$$



**Figure 3.** La forme de déplacement pour les deux travées adjacentes

D'après la figure 3, le déplacement dans la deuxième travée est en fonction de déplacement de la poutre et le déplacement des appuis, donc on peut écrire :

$$y(x + l) = y(l) - (y_{21}(x) + y_{22}(x)) \tag{18}$$

Ou  $y_{21}(x)$  est due de la déformation de l'appui

Et  $y_{22}(x)$  due de la déformation de la travée.

Les conditions aux limites :

$$y_{21}(l) = 0, \tag{19}$$

$$y_{21}(2l) = y(2l) = y(l). e^{-K.l} \tag{20}$$

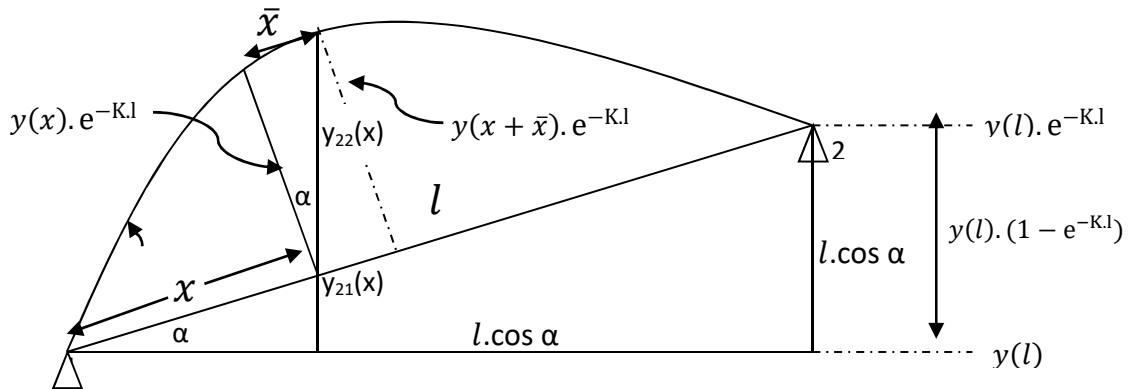


Figure 4. Déplacement de la deuxième travée

La figure 4, nous donne :

$$\sin \alpha = \frac{y(l).(1 - e^{-K.l})}{l} \tag{21}$$

Où :

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{y(l).(1 - e^{-K.l})}{l} \right) \tag{22}$$

Et

$$y_{21}(x) = x. \sin \alpha = \frac{y(l).(1 - e^{-K.l})}{l} . x \tag{23}$$

$$y_{22}(x) = y(x + \bar{x}). e^{-K.l} . \frac{1}{\cos \alpha} \tag{24}$$

$$\bar{x} = y(x). e^{-K.l} . \text{tg } \alpha \tag{25}$$

Donc :

$$y(x + l) = y(l) - (y_{21}(x) + y_{22}(x)) \tag{26}$$

Enfin :

$$y(x + l) = y(l) - \left( \frac{y(l).(1 - e^{-K.l})}{l} . x + y(x + \bar{x}). e^{-K.l} . \frac{1}{\cos \alpha} \right) \tag{27}$$

Où la valeur de  $\bar{x}$  est donnée dans (25).

#### 4. la réponse dynamique pour « n » travées

Pour calculer le déplacement pour une distance x entre les deux supports n et n+1, il faut d'abord calculer le déplacement dans la 3<sup>ème</sup> travée :

L'équation (2), nous donne le déplacement pour l'appui N°03:

$$y_3 = y(3l) = y_1. e^{-2.K.l} \tag{28}$$

$$l. \cos \alpha_{(3)}$$



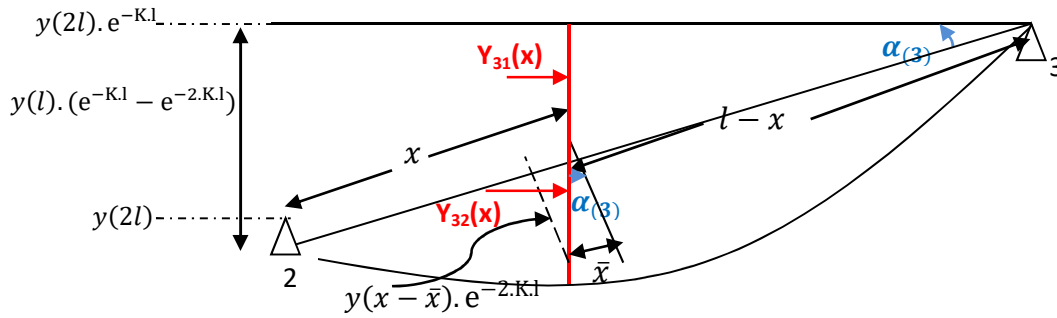


Figure (5). Déplacement de la troisième travée

$$y(x + 2l) = y(3l) - (y_{31}(x) + y_{32}(x)) \tag{29}$$

$$\sin \alpha_{(3)} = \frac{y(2l).(1 - e^{-2.K.l})}{l} = \frac{y(l).(e^{-K.l} - e^{-2.K.l})}{l} \tag{30}$$

$$\alpha_{(3)} = \arcsin \left( \frac{y(l).(e^{-K.l} - e^{-2.K.l})}{l} \right) \tag{31}$$

$$\sin \alpha_{(3)} = \frac{y(l).(e^{-K.l} - e^{-2.K.l})}{l} = \frac{y_{31}(x)}{(l-x)} \tag{32}$$

Donc :

$$y_{31}(x) = \frac{y(l).(e^{-K.l} - e^{-2.K.l})}{l} (l - x) \tag{33}$$

$$y_{32}(x) = y(x - \bar{x}_{(3)}) . e^{-2.K.l} . \frac{1}{\cos \alpha_{(3)}} \tag{34}$$

Où  $\bar{x}_{(3)} = y(x) . e^{-2.K.l} . \text{tg } \alpha_{(3)}$  (35)

Donc :

$$y(x + 2l) = y(l) . e^{-2.K.l} - (y_{31}(x) + y_{32}(x)) \tag{36}$$

Et enfin :

$$y(x + 2l) = y(l) . e^{-2.K.l} - \left( \frac{y(l).(e^{-K.l} - e^{-2.K.l})}{l} (l - x) + y(x - \bar{x}_{(3)}) . e^{-2.K.l} . \frac{1}{\cos \alpha_{(3)}} \right) \tag{37}$$

Où la valeur de  $\bar{x}_{(3)}$  est donnée dans (35).

Donc, pour écrire le déplacement ; ils ont deux formule, une paire et l'autre impaire :

$$y(x + n.l) = y(l) . e^{-n.K.l} - \left( \frac{y(l).(e^{-(n-1).K.l} - e^{-n.K.l})}{l} . x + y(x - \bar{x}_{(n)}) . e^{-n.K.l} . \frac{1}{\cos \alpha_{(n)}} \right) \tag{36}$$

Pour (n=2, 4, 6, 8, ...).

Et

$$y(x + n.l) = y(l). e^{-(n-1).K.l} - \left( \frac{y(l).(e^{-(n-1).K.l} - e^{-n.K.l})}{l} . x + y(x + \bar{x}_{(n)}). e^{-n.K.l} . \frac{1}{\cos \alpha_{(n)}} \right) \quad (37)$$

Pour (n=3, 5, 7, 9,...).

Avec :

$$\alpha_{(n)} = \arcsin \left( \frac{y(l).(e^{-(n-2).K.l} - e^{-(n-1).K.l})}{l} \right) \quad (38)$$

$$\bar{x}_{(n)} = y(x). e^{-(n-1).K.l} . \text{tg } \alpha_{(n)} \quad (39)$$

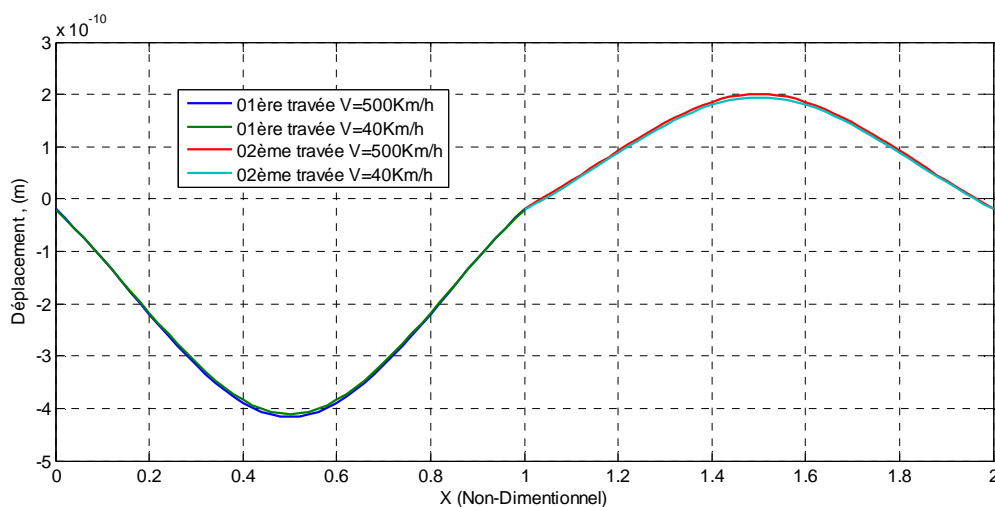
## 5. Résultats et discussions :

On considère une poutre-rail, ses paramètres physiques sont :

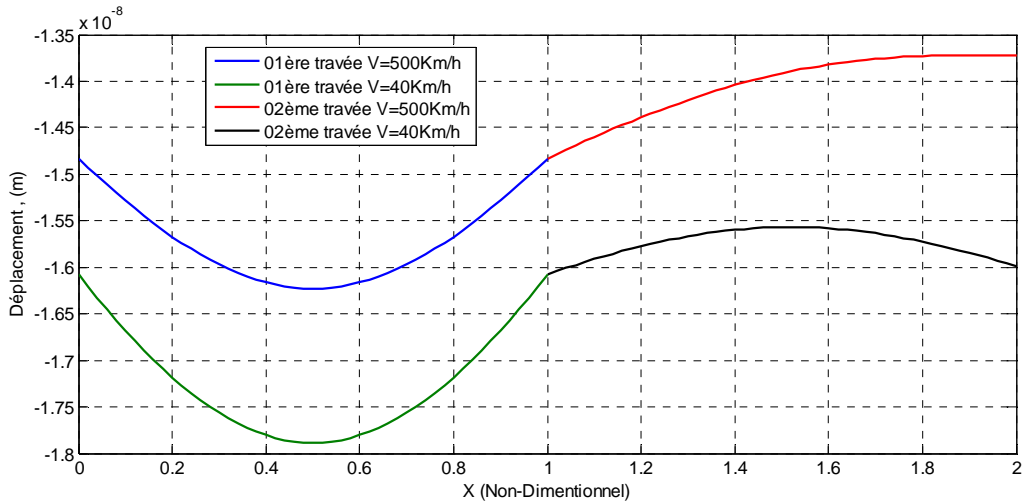
Les paramètres physiques du rail RAIL TYPE 60 KG UIC - E 1 (NORME DIN 5901)		
hauteur	172	mm
Patin	150	mm
Boudin	72	mm
Masse linéique théorique	60,21	kg/m
Moment d'inertie Ix	3055	cm <sup>4</sup>
Module d'inertie Ix/v	335,53	cm <sup>3</sup>
section	76,86	cm <sup>2</sup>
Masse volumique	7870	kg/m <sup>3</sup>

Les caractéristiques physiques des supports :

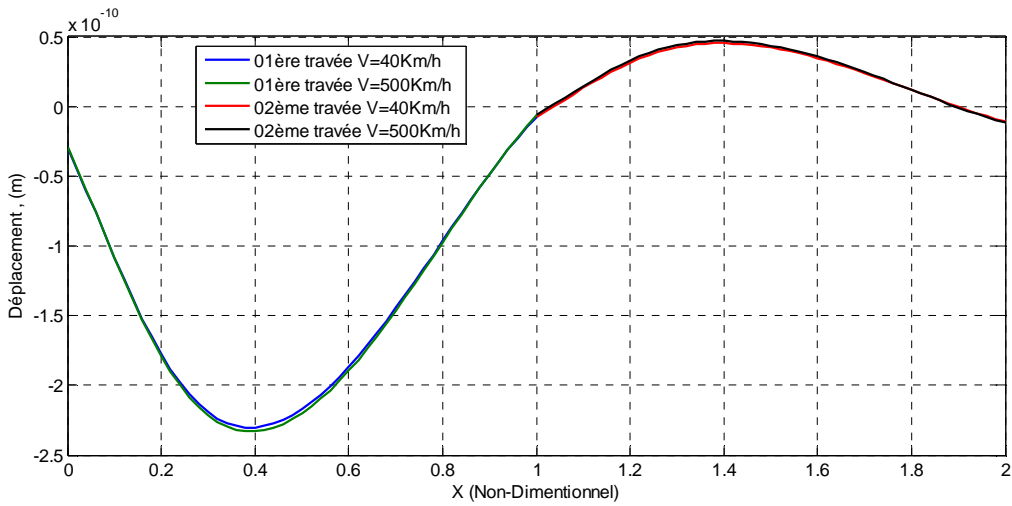
- Supports élastiques (rigidité élevée  $S_y=3.10^{10}$  N/m, et de faible rigidité  $S_y=2.10^7$  N/m)
- La distance entre supports consécutifs est  $L = 0.6m$  ;
- La masse de la traverse  $m = 162kg$  ;



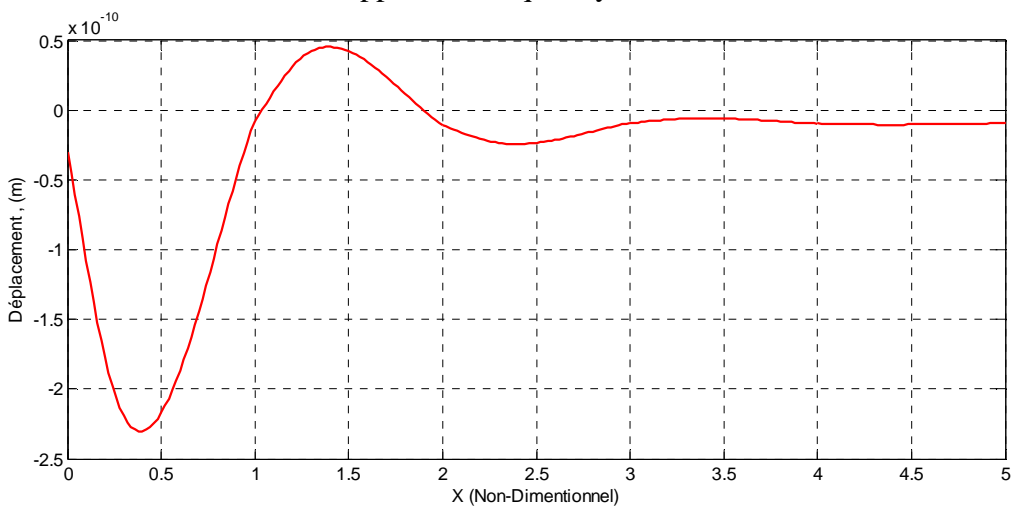
Fig(6) : Déplacement vs X (Non-dimensionnel) pour deux travées (X=0,50) supports élastiques  $s_y= 3e10$



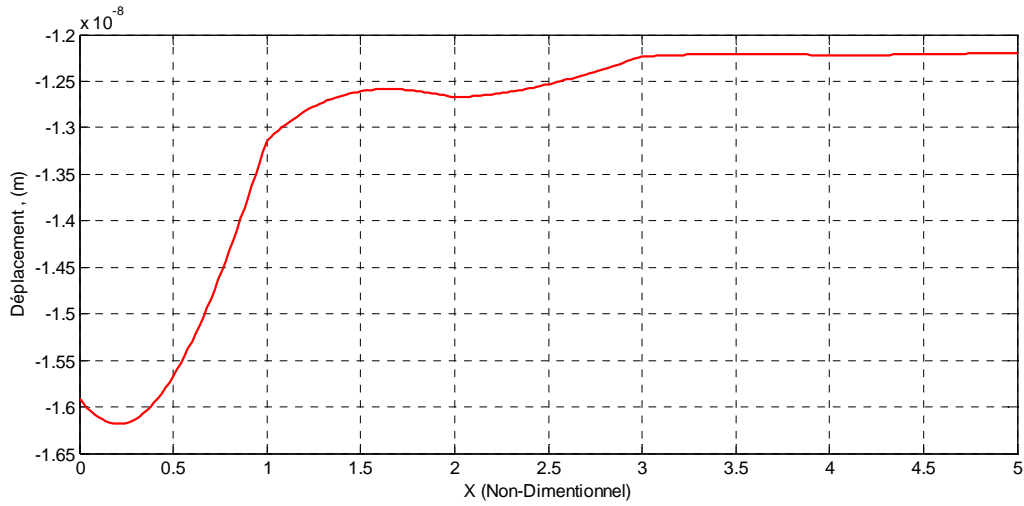
Fig(7) : Déplacement vs X (Non-dimensionnel) pour deux travées (X=0,50) supports élastiques  $s_y = 2e7$



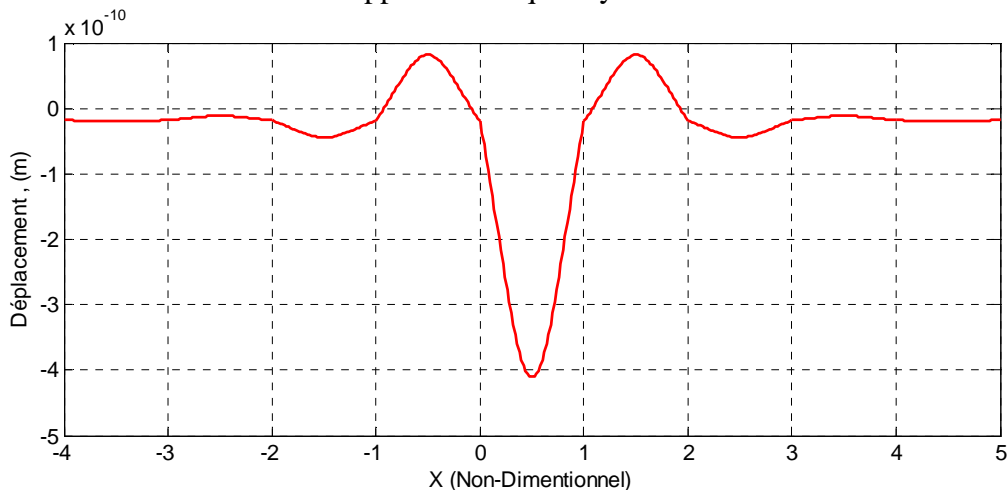
Fig(8) : Déplacement vs X (Non-dimensionnel) pour deux travées (X=0,20) supports élastiques  $s_y = 3e10$



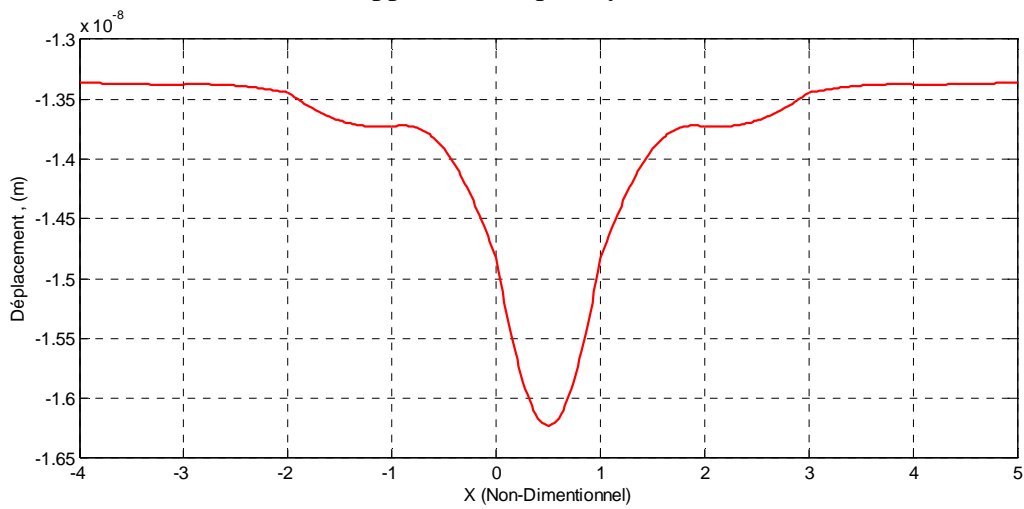
Fig(9) : Déplacement vs X (Non-dimensionnel) pour Cinq (05) travées (X=0,20) supports élastiques  $s_y = 3e10$



Fig(10) : Déplacement vs X (Non-dimensionnel) pour Cinq (05) travées (X=0,20) supports élastiques  $s_y= 2e7$



Fig(11) : Déplacement vs X (Non-dimensionnel) pour Neuf (09) travées (X=0,50) supports élastiques  $s_y= 3e10$



Fig(12) : Déplacement vs X (Non-dimensionnel) pour Neuf (09) travées (X=0,50) supports élastiques  $s_y= 2e7$

## 6. Conclusion

La méthode de la transformation Bloch a été utilisée pour étudier la dynamique d'une structure rail reposant sur des supports périodiques. Il permet de calculer la réponse de rail à n'importe quel chargement dynamique en calculant la transformation de Bloch du déplacement induit par le chargement.

## 7. Références

- [1]: L BRILLOUIN 1842 *Wave Propagation in Periodic Structures*[ New York] Dover
- [2]: D J MEAD *Wave Propagation In Continuous Periodic Structures: Research Contributions From Southampton, 1964–1995.*
- [3]: Brillouin, L., 1953. *Wave propagation in periodic structures: Electric Filters and Crystal Lattices.* Dover, New York.
- [4]: M. A. HECKL 1964 *Journal of the Acoustical Society of America* 36, 1335-1343. Investigations into vibrations of grillages and other simple beam structures.
- [5]: D. J. MEAD 1970 *Journal of Sound and Vibration* 11, 181-197. Free wave propagation in periodically supported, infinite beams.
- [6]: D. J. MEAD 1975 *Journal of Sound and Vibration* 40, 1-18. Wave propagation and natural modes in periodic systems, I: mono-coupled systems.
- [7]: D. J. MEAD 1975 *Journal of Sound and Vibration* 40, 19-39. Wave propagation and natural modes in periodic systems, II: multi-coupled systems.
- [8]: D. J. MEAD 1986 *Journal of Sound and Vibration* 104,9-27. A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates.
- [9]: M. L. MUNJAL and M. HECKL 1982 *Journal of Sound and Vibration* 84, 491-500. Vibrations of a periodic rail-sleeper system excited by an oscillating stationary transverse force.
- [10]: H.M. Saed , F. Vestroni, Simulation of combined systems by periodic structures : the wave transfer matrix approach, *Journal of Sound and Vibration*, 213(1), 55-73, 1998.
- [11]: R.S. Langley, On the modal density and energy flow characteristics of a periodic structure, *Journal of Sound and Vibration*, 172(4), 491-511, 1994.
- [12]: L. Gry , C. Gontier, Dynamic modelling of railway track : a periodic model based on a generalized beam formulation, *Journal of Sound and Vibration*, 199(4), 532-538, 1997.
- [13]: R.S. Langley, The response of two-dimensional periodic structures to point harmonic loading, *Journal of Sound and Vibration*, 197(4), 447-469, 1996.
- [14]: A. Nordborg, Vertical rail vibrations : pointforce excitation, *Acustica*, 84, 280-288, 1998.
- [15]: V.H. Nguyen, D. Duhamel, 2006. Finite element procedures for nonlinear structures in moving coordinates, Part 1 : Infinite bar under moving axial loads. *Computers and Structures*, 84, 1368-1380,.
- [16]: D. Duhamel, B.R. Mace, M.J. Brennan, 2006. Finite element analysis of the vibration of waveguides and periodic structures, *Journal of sound and Vibration*, 294, 205-220.
- [17]: Belostserkovkiy. P.M, 1999. periodic string response to an impact and a suddenly applied concentrated stationary force, *Journal of Sound and Vibration*, 228(1), pp.51-61.
- [18]: Belostserkovsky AIS, Ginevsky AS, 2002. Numerical simulation of the far vortex wake during takeoff and landing operations (in Russian). *Russ Acad Sci Reports* 380, № 6: 761 – 764
- [19]: Belostserkovkiy. P.M, 2004. the interaction of an infinite wheel-train with a constant spacing between the wheels moving uniformly over a rail track, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 68, pp.923-631.
- [20]: G. FLOQUET. 1883. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Annales E.N.S.*, T.12, p.47.
- [21]: G Carta, M Brun Bloch–Floquet, 2015 waves in flexural systems with continuous and discrete elements, *journal Mechanics of Materials*. DOI: 10.1016/j.mechmat.2015.03.004.
- [22]: D. J. Mead, Y Yaman, 1990. The harmonic response of uniform beams on multiple linear supports: A flexural wave analysis, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 141, Issue 3, p. 465-484
- [23]: D. J. Mead, Y Yaman, 1991. The response of infinite periodic beams to point harmonic forces: a flexural wave analysis, *Journal of Sound and Vibration* 144 (3), 507-529
- [24]: Heckl. M. A, 2002. 'Coupled Waves on the Periodically Supported Timoshenko Beam. 'J .Sound .Vibration., 252(5), 849-882.
- [25]: Hamet. J.F, 1997. 'propagation des ondes de flexion d'un rail posé sur travers'.  
[26]: Lassoued, R.; Lecheheb, M.; Bonnet, G. Green's function and Bloch theory for the analysis of the dynamic response of a periodically supported beam to a moving load. *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 382, Issue 1, article id. 012053, 7 pp.

[27] G. Allaire, The Bloch transform and applications, *ESAIM Proceedings*, **3**, 65-84, 1998.

[28] J. Sanchez Hubert, E. Sanchez Palencia, *Vibration and coupling of continuous systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[29]: R.S. Langley, The response of two-dimensional periodic structures to point harmonic loading, *Journal of Sound and Vibration*, **197(4)**, 447-469, 1996. [28]:

[30]: J.F. Hamet, Railway noise: use of the Timoshenko model in rail vibration studies, *Acustica*, **85**, 1-12, 1999.