

ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE VARIABLE NOUVELLE METHODE D'ÉVALUATION POUR LE COEFFICIENT DE MANNING DANS LES CONDUITES EN FER A CHEVAL

Rachid ZEGAIT^{1*} and Bachir ACHOUR²

¹ENSH, R.N 29 Guerrouaou B.P 31Blida, (09000), Algérie

²Laboratoire de recherche en hydraulique souterraine et de surface – LARHYSS

²Université de Biskra, B.P.145, R.P., 07000, Biskra, Algérie

Résumé. L'écoulement uniforme dans une conduite en forme de fer à cheval se rencontre souvent dans de nombreux cas pratiques, notamment dans les tunnels. Cette conduite peut être utilisée pour l'évacuation des eaux dans les domaines de l'assainissement et de l'aménagement.

Pour dimensionner la conduite sous l'hypothèse d'un écoulement uniforme, on a souvent recours aux relations de Chézy et de Manning. En règle générale, le coefficient c de Chézy et le coefficient n de Manning sont considérés comme des constantes quelque soit la profondeur normale de l'écoulement. Ceci est une approximation du fait que la résistance à l'écoulement devrait varier en fonction de la profondeur ou du rayon hydraulique.

Dans cette étude, nous avons basé sur un coefficient de résistance à l'écoulement variable, dépendant du taux de remplissage de la conduite. le coefficient n de Manning n'est plus une donnée du problème, mais une variable à déterminer. La détermination du coefficient "n" de Manning est rendue possible grâce à la méthode du modèle rugueux (MMR). la méthode du dimensionnement proposée est valable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, englobant les régimes d'écoulement lisse, de transition et turbulent rugueux.

Mots clés: Écoulement uniforme, Conductivité relative, Reynolds, Chézy, Écoulement turbulent

1. Introduction

L'écoulement uniforme dans une conduite en forme de fer à cheval se rencontre souvent dans de nombreux cas pratiques, notamment dans les tunnels. Cette conduite peut être utilisée pour l'évacuation des eaux dans les domaines de l'assainissement et de l'aménagement.

L'un des avantages de cette forme est qu'il se conforme au fond du fossé comme d'habitude excavé. Ainsi, il n'exige pas de la grande augmentation du support de maçonnerie de soutenir la partie verticale arquée.

Un autre avantage est que, pour un diamètre horizontal donné, la section peut être conçue pour moins de taille. Pour dimensionner la conduite de forme fer à cheval de hauteur D , égale au diamètre du cercle qui l'a générée (signifier la dimension linéaire "a" dans la relation fonctionnelle $\varphi(a, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0$ (Achour et al, 2002) .les études existantes se rapportant au dimensionnement de telles conduites ne sont pas nombreuses. Elles proposent soit une résolution graphique ou soit des solutions itératives (Chow, 1973) , qui sont souvent recours aux relations de Chézy (1769) et de Manning (1809) qui basées toutes sur un coefficient de résistance à l'écoulement constant quelque soit la profondeur normale de l'écoulement. Ceci est une approximation du fait que la résistance à l'écoulement devrait varier en fonction de la profondeur ou du rayon hydraulique. D'autres donnent, avec des relations approchées explicites, des solutions pour les grosses conduites remplies à 75% (Swamee et Swamee, 2008). Il n'existe pas actuellement une approche théorique donnant des solutions intégrant toute valeur du taux de remplissage η entre 0 et 1.

* Corresponding author.

E-mail: zegait.rachid@gmail.com

Address:ENSH, R.N 29 Guerrouaou B.P 31Blida, (09000), Algérie

Dans cette étude, le dimensionnement de la conduite est effectué pour un coefficient de résistance à l'écoulement variable, dépendant du taux de remplissage de la conduite. Le coefficient *C de Chézy* n'est plus une donnée du problème, mais une variable à déterminer. Le dimensionnement de la conduite sera basé sur le modèle rugueux de référence. Ce modèle est une conduite caractérisée par une rugosité relative $\bar{\epsilon}/D = 0,037$ arbitrairement choisie. L'écoulement est supposé être turbulent rugueux de telle sorte que le coefficient de frottement soit égal à $\bar{f} = 1/16$ en vertu de l'équation de *Colebrook-white* pour un nombre de Reynolds $R = \bar{R} \rightarrow \infty$

La méthode du dimensionnement proposée est valable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, englobant les régimes d'écoulement lisse, de transition et turbulent rugueux.

2. Caractéristiques géométriques

L'écoulement uniforme dans la conduite en forme de fer à cheval peut se rencontrer en pratique. La conduite est utilisée pour l'évacuation des eaux usées ou pluviales. La figure (1) schématise l'écoulement uniforme de profondeur normale y_n dans la conduite de diamètre D , égal à celui de la conduite de forme circulaire $CEGBC$.

Afin de définir la géométrie de l'écoulement dans la conduite en forme de fer à cheval partiellement occupée, introduisons le paramètre $\eta = y_n / D$, appelé paramètre de forme de la section mouillée ou plus simplement taux de remplissage. A titre d'exemple, la valeur $\eta = 0,5$ indique que l'écoulement occupe 50% de l'aire de la conduite, tandis que la valeur $\eta = 1$ signifie que la conduite est remplie à 100%. Il est bien évident que le taux de remplissage est tel que $0 \leq \eta \leq 1$.

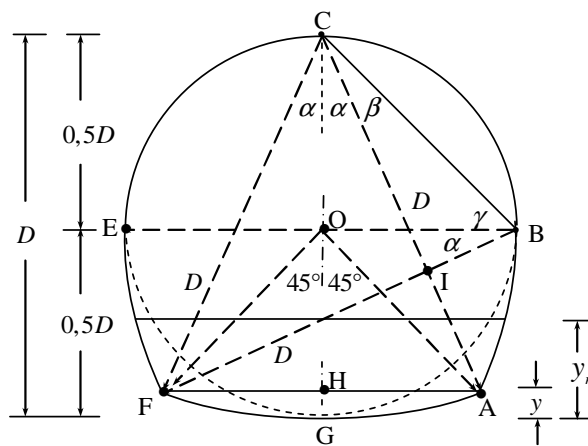


Figure 1 : Schéma de définition de l'écoulement uniforme en conduite en forme de fer à cheval.

Les étapes constructives de la forme de la conduite considérée peuvent se résumer ainsi. Tracer :

- i. le cercle de centre O et de diamètre D.
- ii. le segment \overline{OF} incliné d'un angle de 45° par rapport à la verticale OG.
- iii. l'arc de cercle \overline{EF} , appartenant au cercle de centre B et de diamètre 2D.
- iv. l'arc de cercle \overline{AB} , appartenant au cercle de centre E et de diamètre 2D.
- v. l'arc de cercle \overline{FA} , appartenant au cercle de centre C et de diamètre 2D

La figure (1) suggère en outre les remarques suivantes :

- i. Le triangle isocèle $\triangle COB$ permet d'écrire que :

- $\overline{CB}^2 = 2(D/2)^2 = D^2/2$

soit :

$$\overline{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2} D = 0,707106781 D$$

- L'angle $\gamma = 45^\circ$
- $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

soit :

$$\alpha + \beta = 45^\circ$$

ii. Le triangle droit $\square CIB$, où l'angle $CIB = 90^\circ$, permet d'écrire que :

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{CI}}{\overline{CB}} = \frac{2\overline{CI}}{D\sqrt{2}} = \cos(\pi/4 - \alpha)$$

iii. Dans le triangle droit $\square CIF$, nous pouvons écrire :

$$\cos(2\alpha) = \frac{\overline{CI}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CI}}{D}$$

iv. Ainsi :

$$\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi/4 - \alpha)$$

Cette équation est satisfaite pour :

$$\alpha = 24,295189^\circ, \text{ ou bien } \alpha = 0,42403104 \text{ radian}$$

v. En considérant le triangle $\square CFH$, il vient que :

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{FH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{FH}}{D}$$

soit :

$$\overline{FH} = D \sin(\alpha) = D \sin(24,295189) = 0,41143783 D$$

Ainsi :

$$\overline{FA} = 2\overline{FH} = 2 \times 0,41143783 D = 0,82287566 D$$

vi. Dans le triangle $\square OFH$, nous pouvons écrire que :

$$\overline{FH} = \overline{OH} = 0,41143783 D$$

Par suite, la dimension linéaire y est telle que :

$$\overline{HG} = y = \overline{OG} - \overline{OH} = 0,5 D - 0,41143783 D$$

soit :

$$y = 0,08856217 D$$

vii. La longueur de l'arc de cercle \overline{FA} est :

$$\overline{FA} = 2\alpha D = 2 \times 0,42403104 D = 0,84806208 D$$

viii. La longueur de l'arc de cercle \overline{EF} est telle que :

$$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GA} = \overline{AB}$$

avec :

$$\overline{EF} = \alpha D = 0,42403104 D$$

Selon les paramètres hydrauliques de l'écoulement, tel que le débit volume Q écoulé ou même la pente longitudinale i de la conduite, la profondeur normale y_n peut se situer dans l'un des espaces $FGAF$, $EFGABE$ ou $CEFGABC$.

L'espace $FGAF$ est le segment circulaire appartenant au cercle de rayon $\overline{CF} = D$, de centre C et de demi-angle au centre α . Dans cet espace, la profondeur normale y_n est telle que $y_n \leq y$, ce qui permet d'écrire que le taux de remplissage est $\eta = y_n / D \leq 0,08856217$ (Achour, 2007)

Il est bien évident que lorsque l'écoulement occupe l'espace $EFGABE$, la profondeur normale y_n est telle que $y \leq y_n \leq D/2$. Le taux de remplissage est alors tel que $0,08856217 \leq \eta = y_n / D \leq 0,5$.

Dans l'espace $CEFGABC$, la profondeur normale y_n de l'écoulement est telle que $0,5D \leq y_n \leq D$, ce qui permet d'écrire que le taux de remplissage est $0,5 \leq \eta = y_n / D \leq 1$.

3. Caractéristiques de l'écoulement

Les caractéristiques de l'écoulement, telles que la largeur du plan d'eau ou l'aire de la section mouillée, doivent être déterminées pour chacune des trois gammes précédemment indiquées du taux de remplissage η et en ayant recours à la figure (2)

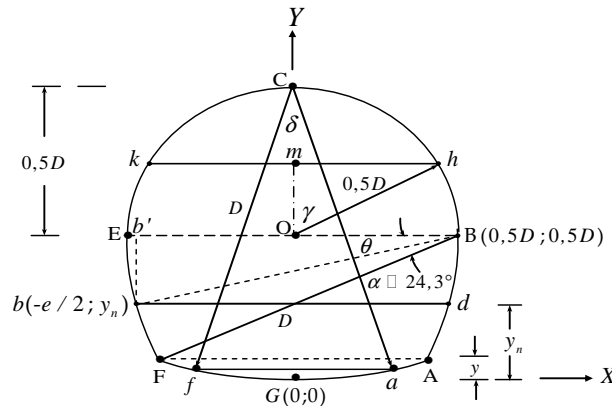


Figure 2 : Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en forme de fer à cheval.

C'est ainsi que :

$$\eta \leq 0.08856217$$

$$e = 2D \sqrt{\eta(2-\eta)} \tag{1}$$

$$P = 2D\sigma(\eta) \tag{2}$$

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-\eta) \tag{3}$$

$$A = D^2\sigma(\eta)\varphi(\eta) \tag{4}$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{(1-\eta)\sqrt{\eta(2-\eta)}}{\cos^{-1}(1-\eta)} \tag{5}$$

$$R_h = \frac{D}{2}\varphi(\eta) \tag{6}$$

$$0.08856217 \leq \eta \leq 0.5$$

$$e = 2D \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2} - \frac{1}{2} \right] \tag{7}$$

$$P = D\vartheta(\eta) \tag{8}$$

$$\vartheta(\eta) = 1,69612416 - 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right) \tag{9}$$

$$A = D^2\zeta(\eta) \tag{10}$$

$$\zeta(\eta) = 0,93662425 - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right) - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2} - \eta \tag{11}$$

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (12)$$

$$0.5 \leq \eta \leq 1$$

$$e = 2D\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (13)$$

$$\tau(\eta) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2\eta - 1) \quad (14)$$

$$P = D \tau(\eta) \quad (15)$$

$$A = D^2 \lambda(\eta)$$

(16)

$$\lambda(\eta) = 0,82932 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (17)$$

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \quad (18)$$

4. Relations usuelles d'écoulement à surface libre

4.1. Relation du Chézy

En 1769, le premier à présenté une formule pour décrire les écoulements à surface libre et uniforme dans les canaux. Elle est présentée sous la forme :

$$Q = C . A \sqrt{R_h i} \quad (19)$$

Elle est considérée comme l'équation générale en hydraulique et peut facilement être démontrée théoriquement. Elle est basée sur les hypothèses que la force de résistance à l'écoulement est proportionnelle au carré de la vitesse de l'écoulement et que la surface de résistance est égale au produit du périmètre mouillé et de la longueur du canal.

Les modèles qui ont été développés par la suite utilisent, en général, l'équation de Chézy dans laquelle ils cherchent à mieux décrire le coefficient C.

4.2. Relation du Manning Strickler

En 1809, l'ingénieur irlandais Manning présenta une formule qui, par la suite, a été réduite à la forme que l'on connaît :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (20)$$

Cette formule a été dérivée des formules existantes et vérifiée par 170 relevés qui sont tirés principalement des expériences de Bazin (Chow, 1959).

En 1936, le comité exécutif de la " Third World Power "Conférence recommande l'utilisation de la formule de Manning à l'échelle internationale (Chow, 1959). Par la suite, elle est devenue la plus usitée pour le calcul des écoulements uniformes en canaux ouverts. Les ingénieurs la préfèrent à cause de sa simplicité et de sa facilité d'utilisation.

5. Etude de l'écoulement a coefficient de résistance variable

Le coefficient de résistance à l'écoulement, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*, devrait en principe dépendre, parmi d'autres paramètres, du taux de remplissage η de la conduite. Lorsqu'il s'agit de

déterminer le diamètre de la conduite, le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, ou n de Manning, ne constitue pas une donnée du problème et les relations universelles (19) et (20). Ces coefficients doivent donc être calculés par des relations différentes de celles que nous avons considérées.

5.1.Relation général et variation du coefficient de résistance n de Manning

Pour exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning par une relation de validité générale, il est utile d'avoir recours à la formule du débit volume d'Achour et Bedjaoui (2006), soit :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (21)$$

Dans cette relation, ε désigne la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et R est un nombre de Reynolds défini par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (22)$$

où ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

En ayant recours aux relations (6), (12), (18), nous pouvons écrire que pour :

i. $\eta \leq 0,08856217$

- La relation (22) mène à :

$$R = 16[\varphi(\eta)]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (23)$$

ou bien :

$$R = 2,7642[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p \quad (24)$$

ii. $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$

- La relation (22) mène à écrire que :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (25)$$

ou bien :

$$R = 7,8185 \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (26)$$

iii. $0,5 \leq \eta \leq 1$

- La relation (22) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (27)$$

ou bien :

$$R = 7,8185 \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (28)$$

Pour le cas de la conduite de forme fer à cheval représenté par la figure (2), l'aire de la section mouillée A figurant dans la relation (21) s'exprime par les relations (4), (10), et (16) selon la gamme du taux de remplissage η . Quant au rayon hydraulique R_h figurant dans la relation (22), il s'exprime par les relations (6), (12) et (18). Il n'existe de nos jours aucune relation générale susceptible d'évaluer à elle seule l'aire de la section mouillée A ou le rayon hydraulique R_h .

Pour une conduite de forme fer à cheval à l'état plein, correspondant au taux de remplissage $\eta = 1$, le rayon hydraulique $R_{h,p}$ est régi par la relation (18), où l'indice « p » désigne l'état plein. Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ figurant dans cette relation sont données par les relations (14) et (17) respectivement, et l'on peut

aisément montrer que $\tau(\eta = 1) \cong 3, 266920475$ et $\lambda(\eta = 1) \cong 0, 82932333$. Par suite, le rayon hydraulique $R_{h,p}$ à l'état plein est, en vertu de la relation (18) :

$$R_{h,p} \cong 0, 254 D$$

En comparant la relation universelle de Manning (20) avec les relations (21), nous pouvons aisément déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \tag{29}$$

La relation (20) constitue la relation générale du coefficient n de Manning, applicable à tous les profils géométriques et dans tout le domaine de l'écoulement turbulent tel que défini par le diagramme universel de Moody.

Le nombre de Reynolds R figurant dans la relation (20) est, pour rappel, donné par les relations (24), (26) et (28), dépendant de la gamme de variation du taux de remplissage η . La relation (20) montre que le coefficient n de Manning est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de Reynolds R et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du taux de remplissage η de la conduite, mais il est intéressant d'observer le degré de cette dépendance. Le rayon hydraulique R_h est donné par les relations (6), (12) et (18), selon la gamme de variation du taux de remplissage η .

En tenant compte de toutes ces relations, nous pouvons écrire que pour :

i. $\eta \leq 0, 08856217$

$$\frac{1}{n} = -6, 3496\sqrt{g} D^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{7, 4\varphi(\eta)} + \frac{3, 632}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \tag{30}$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \tag{31}$$

la relation (2.180) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$N = -6, 3496 [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{7, 4\varphi(\eta)} + \frac{3, 632}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \tag{32}$$

ii. $0, 08856217 \leq \eta \leq 0, 5$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} D^{-1/6} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)}\right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{14, 8[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{1, 284}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \tag{33}$$

ou bien :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)}\right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{14, 8[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{1, 284}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \tag{34}$$

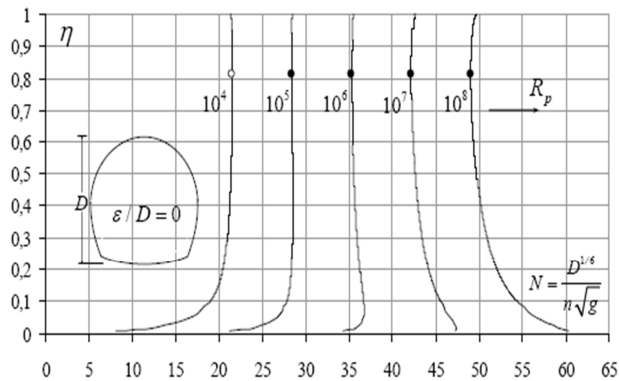
iii. $0, 5 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} D^{-1/6} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)}\right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{14, 8[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{1, 284}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \tag{35}$$

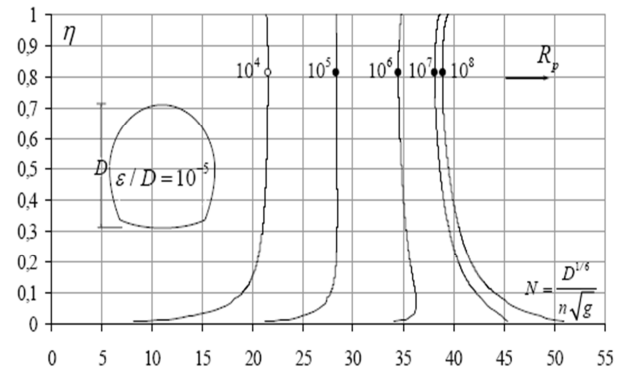
ou bien :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)}\right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{14, 8[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{1, 284}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \tag{36}$$

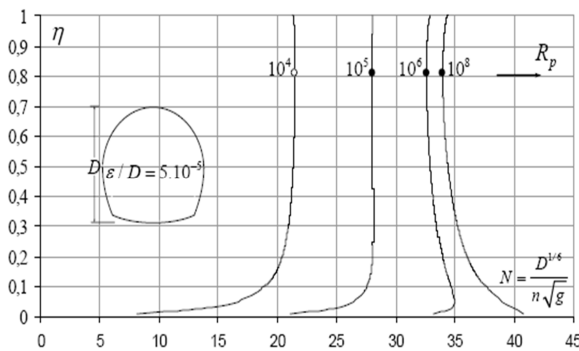
Nous pouvons donc constater que dans toute la gamme $0 \leq \eta \leq 1$, le paramètre adimensionnel N est fonction du taux de remplissage η de la conduite, de la rugosité relative ε / D et du nombre de Reynolds R_p à l'état plein. Les relations (32), (34) et (36) ont été représentées graphiquement sur la figure (3) (a à g), pour quelques valeurs de la rugosité relative ε / D et du nombre de Reynolds R_p .



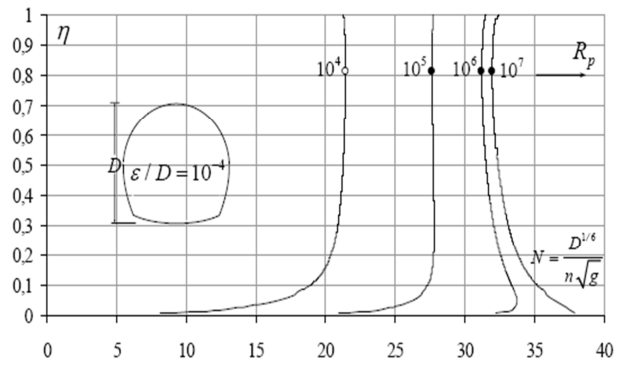
a)



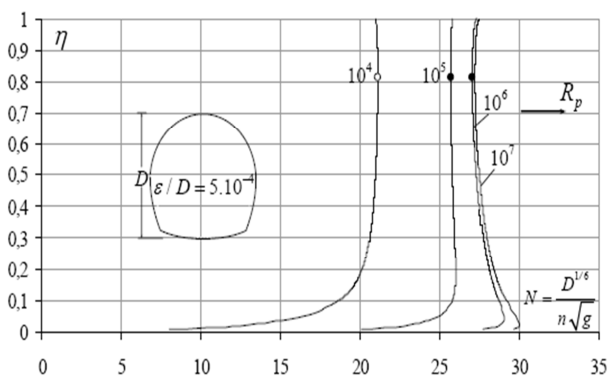
b)



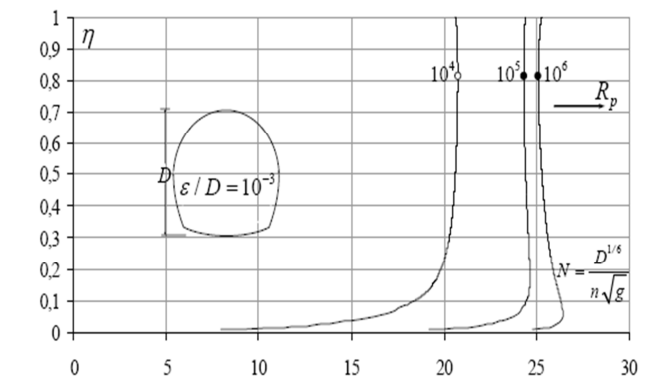
c)



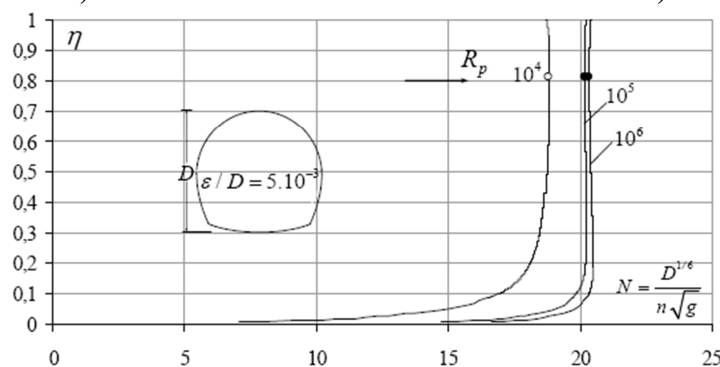
d)



e)



f)



g)

Figure 3: Variation du paramètre adimensionnel N en fonction du taux de remplissage η , pour quelques valeurs de la rugosité relative ε / D et du nombre de Reynolds R_p à l'état plein.

Pour les valeurs pratiques de η , telles que $\eta \geq 0,2$, Il ressort de la figure 3 (a à g) les observations suivantes :

- i. Le paramètre adimensionnel N augmente, jusqu'à un maximum, avec l'accroissement du taux de remplissage η , pour les valeurs de R_p atteignant 10^4 ou légèrement supérieures à 10^4 . Le maximum de N a été observé pour $\eta \cong 0,811$.
- ii. Au-delà de son maximum, le paramètre N diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η .
- iii. Pour les valeurs de $R_p \geq 10^5$, le paramètre N diminue avec l'accroissement de η , jusqu'à un minimum. Le minimum de N a été également observé pour $\eta \cong 0,811$.
- iv. Au-delà de son minimum, le paramètre N augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η .
- v. Un changement de concavité des courbes s'opère dès que le nombre de Reynolds R_p atteint 10^5 .
- vi. Au-delà de $\eta = 0,2$, la variation de N est graduelle et les courbes se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε / D . Dès que la rugosité relative atteint la valeur 5.10^{-3} , les courbes se confondent quasiment lorsque le nombre de Reynolds R_p atteint 10^5 .

Pour les cas pratiques, la plus petite valeur du nombre de Reynolds R_p est de l'ordre de 10^5 , ce qui permet de conclure que le paramètre adimensionnel N présente en pratique des valeurs minimales. Pour le taux de remplissage $\eta \cong 0,811$, N est régi par la relation (2.185) et les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ prennent la valeur $\tau(\eta = 0,811) = 2,36741849$ et $\lambda(\eta = 0,811) = 0,726207015$.

Ainsi, en vertu de la relation (2.186), nous pouvons écrire que pour $R_p \geq 10^5$:

$$N_{\min.} = -4,6455 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,54} + \frac{7,558}{R_p} \right) \tag{37}$$

Ou bien, compte tenu de la relation (2.181) :

$$n_{\max.} = - \frac{0,215 D^{1/6}}{\sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,54} + \frac{7,858}{R_p} \right)} \tag{38}$$

5.2. Calcul du coefficient n de Manning par la MMR

Les relations (30), (33) ou (35) ne permet d'évaluer le coefficient n de Manning que si le diamètre D de la conduite est une donnée du problème. Dans le cas où D n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer de manière explicite la valeur de n , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR).

En comparant les relations (19) et (20), nous pouvons déduire que :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \tag{39}$$

Par conséquent, le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de résistance \bar{n} de Manning tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{-1/6}}{C} \tag{40}$$

Rappelons que $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$.

Le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre \bar{D} ; il écoule un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$ correspondant à un taux de remplissage $\bar{\eta}$, pour une pente longitudinale \bar{i} . Pour déterminer le coefficient n de Manning, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} \neq D$: le diamètre de la conduite considérée est différent de celui du modèle rugueux de référence.
- ii. $\bar{Q} = Q$: la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume Q .
- iii. $\bar{i} = i$: la conduite considérée et le modèle rugueux de référence sont caractérisés par la même pente longitudinale i .
- iv. $\bar{\eta} = \eta$: Le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- v. $\bar{\nu} = \nu$: la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même liquide.

Le débit volume \bar{Q} écoulé par le modèle rugueux de référence s'écrit :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{-2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (41)$$

L'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence \bar{A} et \bar{R}_h par les relations suivantes :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (42)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (43)$$

En tenant compte des relations (42) et (43), la relation (20) devient :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{\psi^{8/3}}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{-2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (44)$$

Il ressort ainsi des relations (41) et (44) que :

$$n = \bar{n} \psi^{8/3} \quad (45)$$

En combinant les relations (40) et (45), il vient que :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (46)$$

5.3. Détermination du coefficient ψ

Le paramètre ψ sans dimension tel que $0 \leq \psi \leq 1$ et défini par la relation (Achour et Bedjaoui 2006)

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon}{19 R_h} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \quad (45)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , le rayon hydraulique \bar{R}_h , figurant dans la relation (45), est défini par des relations similaires aux relations (6), (12) et (18). De même que le nombre de Reynolds \bar{R} est donné par l'une des relations (24), (26) et (27). Ainsi :

- i. $\eta \leq 0,08856217$

$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{2} \varphi(\eta) \quad (46)$$

La relation (45) s'écrit, en tenant compte des relations (46) et (24) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{9,5 \varphi(\eta)} + \frac{3,075}{[\varphi(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (47)$$

- ii. $0,08865217 \leq \eta \leq 0,5$

$$\overline{R_h} = \overline{D} \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \tag{48}$$

Tenant compte des relations (48) et (26), la relation (45) s'écrit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{1,087}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \overline{R_p}} \right) \right]^{-2/5} \tag{49}$$

iii. $0,5 \leq \eta \leq 1$

$$\overline{R_h} = \overline{D} \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \tag{50}$$

La relation (45) devient alors, tenant compte des relations (50) et (28) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{1,087}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \overline{R_p}} \right) \right]^{-2/5} \tag{51}$$

5.4. Détermination du diamètre \overline{D} par la MMR

Les approches théoriques de dimensionnement hydraulique des sections des canalisations sont assez homogènes elle se basant sur des formules traditionnellement admises d'hydraulique : *Bazin (1897)*, *Manning-Strickler (1923)* et *Colebrook*, qui sont tout basé sur celle de *Chézy* qui considéré l'une des premières formules destinées au calcul de l'écoulement uniforme

Selon la MMR, l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de frottement $\overline{f} = 1/16$ (*Achour, 2007*), ce qui se traduit par un coefficient de résistance de Chézy :

$$\overline{C} = \sqrt{8g / \overline{f}} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (\text{Achour, 2007}) \tag{52}$$

En outre, le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre \overline{D} , écoulant un débit volume \overline{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\overline{\nu}$ correspondant à un taux de remplissage $\overline{\eta}$, sous une pente longitudinale \overline{i} . Pour déterminer le Diamètre 'D' de la conduite, admettons les conditions suivantes :

$$\overline{D} \neq D \quad \overline{Q} = Q \quad \overline{i} = i \quad \overline{\eta} = \eta \quad \overline{\nu} = \nu$$

Définissons la conductivité relative Q^*

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \tag{53}$$

La relation(53) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$\eta \leq 0,08856217$$

$$Q^* = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{3/2}}{\sqrt{2}} \tag{54}$$

$$0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$$

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \tag{55}$$

$$0,5 \leq \eta \leq 1$$

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (56)$$

Selon la relation (53) et tenant compte des conditions (ii) et (iii), la conductivité relative \bar{Q} du modèle rugueux de référence serait telle que :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (57)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (52) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g D^5 i}} \quad (58)$$

La conductivité relative \bar{Q}^* est régie par les relations (54), (55) et (56) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . Ainsi, pour :

i. $\eta \leq 0.08856217$

$$\bar{Q}^* = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{3/2}}{\sqrt{2}} \quad (59)$$

Les relations (57) et (59) permettent de déduire que le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{D} = \frac{0,43527}{[\sigma(\eta)]^{0,4} [\varphi(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \quad (60)$$

ii. $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (61)$$

Les relations (57) et (61) permettent d'écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \quad (62)$$

iii. $0,5 \leq \eta \leq 1$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (63)$$

Nous pouvons déduire des relations (57) et (63) que :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \quad (64)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est donné par l'une des relations (47), (49) ou (51) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , tandis que \bar{R}_h s'exprime par l'une des relations (46), (48) ou (50). Ainsi :

i. $\eta \leq 0,08856217$

$$n = \frac{0,175}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{9,5 \varphi(\eta)} + \frac{3,075}{[\varphi(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (65)$$

ii. $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$

$$n = \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{1,087}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (66)$$

iii. $0,5 \leq \eta \leq 1$

$$n = \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{1,087}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (67)$$

Selon les relations (65), (66) et (67), le coefficient n de Manning s'exprime en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{D} et \bar{R}_p du modèle rugueux de référence. Suivant la valeur de η , le diamètre \bar{D} est donné par l'une des relations (60), (62) ou (64), tandis que le nombre de Reynolds \bar{R}_p est régi par la relation (22).

5.5. Exemple d'application

La conduite fer à cheval représenté par la figure (2.) écoule le débit volume $Q = 1 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous la pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est dans un état pratiquement lisse et le taux de remplissage de la conduite doit être maintenu à 60%.

Calculer la valeur :

- i. du coefficient n de Manning.
- ii. de la profondeur normale y_n .

Solution

i. Puisque $0,5 \leq \eta \leq 1$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.145). Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont données par les relations (14) et (17) respectivement et prennent pour valeurs :

- $\tau(\eta) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2\eta - 1) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2(0,6) - 1) = 1.897482$

$$\begin{aligned} \lambda(\eta) &= 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \\ &= 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2(0,6) - 1) + \left((0,6) - \frac{1}{2} \right) \sqrt{(0,6)(1-(0,6))} = 0,5359535 \end{aligned}$$

Selon la relation (64), le diamètre \bar{D} est :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1.897482^{0,2}}{2,639 \times 0,5359535^{0,6}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{9,81 \times 0,0005}} \right)^{0,4} = 1,813811142 \text{ m}$$

$$\bar{R}_p \cong 5,7882 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 5,7882 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,813811142^3}}{10^{-6}} = 990264,3233$$

i. Puisque $0,5 \leq \eta \leq 1$, alors le coefficient n de Manning est régi par la relation (67), soit :

$$n = \frac{0,197}{\sqrt{g}} D^{-1/6} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 \left[\lambda(\eta) / \tau(\eta) \right]} + \frac{1,087}{\left[\lambda(\eta) / \tau(\eta) \right]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-16/15}$$

$$= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 1,813811142^{1/6} \times \left[\frac{0,53595352}{1,897482069} \right]^{1/6}$$

La vérification

$$\times \left[-\log \left(\frac{1,087}{\left[0,53595352 / 1,897482069 \right]^{3/2} \times 990264,32} \right) \right]^{-16/15} = 0,009812637 m^{-1/3} s$$

des calculs peut porter sur la détermination du débit volume Q par la relation générale (21).

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (16). La valeur de la fonction $\lambda(\eta)$ est, selon la relation (17) :

- $$\lambda(\eta) = 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)}$$

$$0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2(0,6009312) - 1) + \left((0,6009312) - \frac{1}{2} \right) \sqrt{(0,6009312)(1 - (0,6009312))}$$

$$= 0,536865748$$

Ainsi :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 1,276^2 \times 0,536865748 = 0,86950315 m^2$$

Le rayon hydraulique R_h est régi par la relation (18). La valeur de la fonction $\tau(\eta)$ est, en vertu de la relation (14) :

$$\tau(\eta) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2\eta - 1) = \tau(\eta) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2 \times 0,6009312 - 1) = 1.89938327$$

Ainsi :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 1,276 \frac{0,536865748}{1,89938327} = 0,35971274$$

Le nombre de Reynolds R est, selon la relation (22) :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,35971274^3}}{10^{-6}} = 683782,861$$

Par suite, selon la relation (21), le débit volume Q est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,869503155 \times \sqrt{0,35971274} \times 5.10^{-4} \times \log \left(\frac{10,04}{683782,861} \right) = 0,998566382 m^3 / s$$

$$\cong 1 m^3 / s$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à **0,15%** seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

6. Conclusion

Une nouvelle méthode pour la coefficient de résistance de Manning de la conduite en fer à cheval est présentée. C'est la méthode du modèle rugueux (MMR) qui stipule que toute dimension linéaire d'une conduite ou d'un canal est égale à la dimension linéaire d'un modèle rugueux de référence, corrigé par les effets d'un factor de correction adimensionnel.

La méthode est base sur les relations de Colebrook-White et de Darcy-Weisbach et est, de ce fait, valable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent.

L'application de la méthode pour la détermination du coefficient de résistance de Manning de la conduite en fer à cheval est présentée. Cela a mené à l'établissement d'une excellente relation approchée du diamètre de la conduite, dépendant du facteur de correction adimensionnel. Ce dernier dépend de la variation de taux de remplissage de la conduite et le nombre de Reynolds à l'état plein

La relation obtenue permet de déduire explicitement le coefficient d dans la conduite considérée, en utilisant la relation fondamentale de MMR.

Un exemple pratique est présenté pour expliquer le processus de calcul, en notant que le coefficient de Chézy ou celui de Manning n'est pas requis.

7. Nomenclature

| | |
|--|---|
| A (m^2) Aire d'une section mouillée. | \bar{R} (-) Nombre de <i>Reynolds</i> dans le modèle rugueux de référence. |
| C ($m^{1/2}/sec$) Coefficient de résistance de Chézy | \bar{R}_p (-) Nombre de <i>Reynolds</i> à l'état plein dans le modèle rugueux de référence. |
| \bar{C} ($m^{1/2}/sec$) Coefficient de Chézy de modèle rugueux | Rh (m) Rayon hydraulique. |
| D (m) Diamètre d'une conduite. | \bar{R}_h (m) Rayon hydraulique dans le modèle rugueux de référence. |
| \bar{D} (m) Diamètre d'une conduite dans le modèle rugueux de référé | ψ (-) Paramètre sans dimension. |
| e (m) Largeur du plan d'eau | \mathcal{E} (m) rugosité absolue. |
| g (m/sec^2) Accélération de la pesanteur. | ν (m^2/sec) viscosité cinématique |
| i (m/m) Pente longitudinale de la conduite | η (-) taux de remplissage |
| P (m) Périmètre mouillé. | |
| \bar{Q} (m^3/sec) Débit volume. | |
| \bar{Q} (m^3/sec) Débit dans le modèle rugueux de référence. | |
| \bar{Q}^* (-) Conductivité relatif. | |
| \bar{Q}^* (-) Conductivité relative dans le modèle rugueux de référénc | |
| R (-) Nombre de <i>Reynolds</i> . | |
| R_p (-) Nombre de <i>Reynolds</i> à l'état plein | |

8. References

1. Achour B., Bedjaoui A. (2006). Discussion. Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, Vol. 44, n°5, 715-717.
2. Achour B. (2013). Design of Pressurized Vaulted Rectangular Conduits Using the Rough Model Method, Advanced Materials Research, Vols. 779-780, 414-419, Trans. Tech. Publications, Switzerland. doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.779-780.414.
3. Achour B., Bedjaoui A. (2012). Turbulent Pipe-flow Computation Using The Rough Model Method (RMM), Journal of civil engineering and science, Vol.1, n°1, 36-41.
4. Chow V.T. (1973). Open-Channel Hydraulics, Editions McGraw Hill, New York.
5. Colebrook C.F. (1939). J. Inst. Civil Eng., 11, 133- 156.
6. Darcy H. (1854). Sur les recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 38, 1109-1121.
7. Sinniger R.O., Hager, W.H. (1989). Constructions hydrauliques, Editions Presses Polytechniques Romandes, Suisse.
8. Swamee P.K., Jain, A.K. (1976). Explicit equations for pipe-flow problems, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 102 (HY5), 657-664, (HY11), 1707-1709. Swamee P.K., Swamee N. (2008). Design of noncircular sewer sections, Journal of Hydraulic Research, Vol. 46, n°2, 277-281.
9. Swamee P.K., Rathie P.N. (2004). Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, Vol. 42, n°5, 541-547