

# La Méthode Descente De Gradient Pour La Reconstruction Tomographique Des Images 2D A Rayon-X

Chetih Nabil <sup>1\*</sup>, Messali Zoubeida <sup>2</sup> and Serir Amina <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Faculté d'Electronique et d'Informatique, Département de Télécommunication, Alger, Algérie.

<sup>2</sup> Université El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou-Arréridj, Faculté des Sciences et de la Technologie, Département d'Electronique, 34265 El Anassers, Bordj Bou-Arréridj, Algérie.

<sup>3</sup> Laboratoire de Traitement d'Images et de Rayonnement (LTIR), Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Alger, Algérie

**Résumé.** Cet article concerne la reconstruction tomographique 2D d'images à rayon-x. Le problème de reconstruction tomographique est un problème inverse c.-à-d. Estimer l'objet à partir de ses projections. Dans ce travail, nous avons établi une étude détaillée sur la méthode de descente de gradient, qui s'inscrit dans le cadre des méthodes itératives de reconstruction tomographique. Ces méthodes consistent à exprimer le problème directement sous une forme discrète. Grâce aux résultats de simulation, nous avons montré que l'algorithme de gradient offre une bonne qualité de reconstruction en termes des critères d'évaluation en plus la qualité visuelle des images reconstruites.

**Mots clés:** *Reconstruction Tomographique, Problème Inverse, Projections, Descente de Gradient.*

**Abstract.** This article concerns the tomographic reconstruction of 2D x-ray images. The problem of tomographic reconstruction is an inverse problem i.e. to estimate the object starting from its projections. In this work, we have established a study detailed on the method of descent of gradient which lies within the scope of the iterative methods of tomographic reconstruction. These methods consist in expressing the problem directly in a discrete form. Through these simulated results, we have demonstrated that the gradient algorithm offers a good quality of reconstruction in terms of the criteria of evaluation in addition the visual quality of reconstructed images.

**Keywords:** *Tomographic Reconstruction, Inverse Problem, Projections, Descent of Gradient.*

## 1. Introduction

La tomographie est une technique de création d'image par section. Elle permet de reconstruire des images 2D et 3D et de visualiser la structure interne d'un objet sans le découper matériellement. L'utilisation de la tomographie est majoritairement et historiquement connue dans le cadre de l'imagerie médicale pour laquelle l'objet à reconstruire est le corps humain, mais elle est aussi pratiquée dans d'autres domaines très différents tels qu'en géophysique, la biologie et l'astronomie.

Pendant la dernière décennie, il y a eu une avalanche de publications sur différents aspects de la tomographie [1-4]. La complexité de la tomographie réside, en grande partie, dans le fait qu'il s'agit d'un problème inverse mal posé dont la résolution exacte et directe est par conséquent impossible. Ce problème a été abordé de façons diverses, en utilisant les méthodologies générales des problèmes inverses, de la restauration d'image, ou la théorie de la Transformée de Radon qui est sous-jacente en tomographie. Le problème de l'inversion de la transformée de Radon a été résolu dans le cas général dès 1917[5].

---

\* Corresponding author.

E-mail: [nchetih@usthb.dz](mailto:nchetih@usthb.dz) (Chetih N.).

Address: BP 50 Cedex 28 M'sila 28000 Algérie.

Le principal problème de la reconstruction tomographique est d'inverser la Transformée de Radon c.-à-d. Estimer l'objet à partir de ses projections; on est devant un problème inverse. Ce problème est rendu très complexe par le manque d'information des données. La résolution du problème de reconstruction tomographique comme un problème inverse se fait à partir de deux types de méthodes : les méthodes analytiques et les méthodes itératives [6]. Dans cet article, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'algorithme de descente de Gradient [7] qui s'inscrit dans le cadre des méthodes itératives.

## 2. Principe de reconstructions des objets à partir de leurs projections

Dans ce paragraphe nous reprenons les résultats théoriques concernant les projections de Radon et nous montrons comment ils sont utilisés pour traiter les problèmes de reconstruction d'images en particulier dans des applications biomédicales comme la tomographie. Le principe de cette reconstruction est relativement simple: en fait on regarde un objet plus ou moins opaque (comme une radiographie) et on distingue donc les objets en projection. Ensuite on regarde les objets sous un autre angle, on en a donc une vue différente. On imagine bien qu'à partir de différentes vues on peut reconstruire l'objet par exemple dans un espace à deux dimensions à partir des projections vues sous des angles différents. Dans ce qui suit, nous donnons une définition mathématique de l'opérateur de projection déjà introduit. Il s'agit de la transformée de Radon.

### 2.1. Transformée de Radon

L'idée principale de la tomographie est basée sur l'hypothèse de Radon ce qu'on peut reconstruire l'image d'un objet depuis toutes ses projections à différents angles [5]. Cette transformée porte le nom de Johann Radon. La transformée directe de Radon décrit la projection d'un objet selon des lignes intégrales. Les travaux de Radon sont à la base de nombreuses applications dans différents domaines. Pour avoir plus de précisions sur les fondements théoriques et connaître les nombreuses applications de la tomographie, nous pourrions référer aux ouvrages de F. Natterer [8], G. Herman [9] et à un ouvrage plus récent dirigé par P. Grangeat [10]. La formule de passage entre l'espace d'une fonction vers l'espace de Radon (espace des projections), s'écrit de la façon suivante:

$$p_{\theta}(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t) dx dy \quad (1)$$

$$p_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\cos\theta - r\sin\theta, t\sin\theta + r\cos\theta) dr \quad (2)$$

Avec la relation entre les deux repères  $(x, y)$  et  $(t, r)$  de l'objet et de la projection respectivement, est

$$\begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

Dans le cas 2D la transformée de Radon de  $f(x,y)$  est associée à l'ensemble de ses intégrales sur des droites perpendiculaires à la ligne de projection. Pour un angle donné  $\theta$ , la valeur de  $p_{\theta}(t)$  est assignée à tous les pixels qui se trouvent le long de la ligne d'intégration. La Figure 1 illustre la projection tomographique d'un objet  $f(x,y)$  selon un angle  $\theta$ . La nature physique de l'objet et les lignes intégrales dépend essentiellement du domaine d'application. Une projection est formée d'un ensemble de lignes intégrales. Ensemble de ces projections pour une valeur de  $\theta \in [0, \pi]$  égale la transformée de Radon de  $f(x,y)$  donnée par équation (2) où La transformée de Radon de l'objet  $f$ , notée  $R_{\theta}f$  est définie par la relation suivante :

$$[R_{\theta}f](t) = p_{\theta}(t) \quad (4)$$

$R$  désigne l'opérateur de la transformée de Radon.

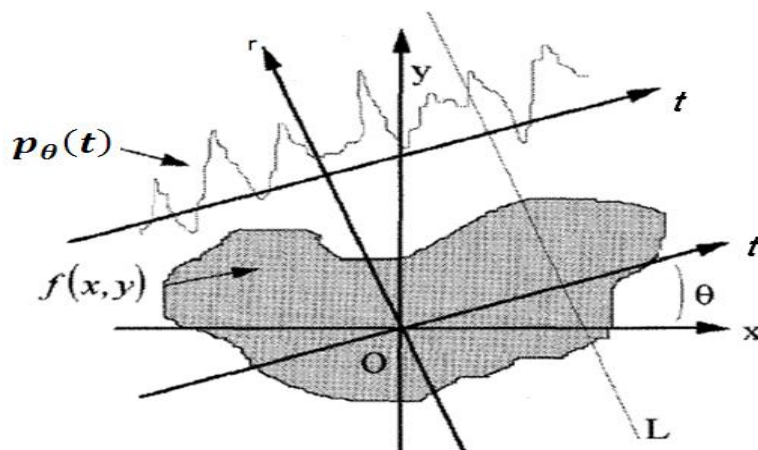


Fig. 1: La projection tomographique d'un objet  $f(x, y)$  selon un angle  $\theta$

## 2.2. Sinogramme

Les lignes de projections acquises peuvent être disposées les unes au-dessous des autres en fonction de l'angle ; cette représentation est un sinogramme. Les sinogrammes et les projections contiennent les mêmes informations ; ils ne diffèrent que par l'organisation avec laquelle les informations sont représentées. Un sinogramme contient toute l'information relative à une coupe, pour tous les angles de projection alors qu'une projection contient toute l'information relative à toutes les coupes mais pour une incidence angulaire donnée [11]. Chaque ligne de matrice de sinogramme correspond à la projection monodimensionnelle de la coupe pour un angle  $\theta$  particulier. Un exemple de représentation sous forme de sinogramme est donné dans la Figure 2

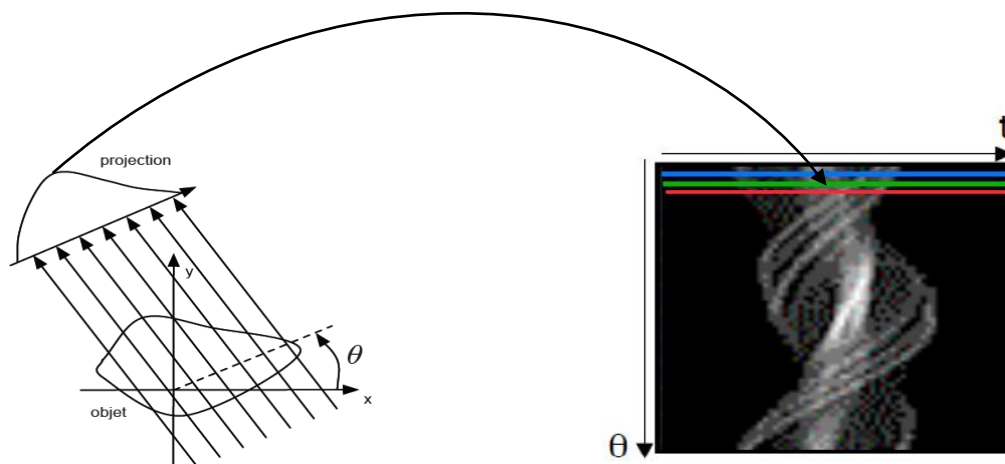


Fig. 2 : Un sinogramme contient ensemble des éléments de projection

## 2.3. Inversion de la transformée de Radon

Une fois l'acquisition effectuée de l'ensemble des projections, il s'agit maintenant d'inverser la transformée de Radon afin de remonter à l'objet qui est à l'origine du sinogramme obtenu. La méthode la plus simple pour reconstruire un objet à partir de ses projections est de projeter en sens inverse - rétroprojeter- la valeur de chaque projection  $p_\theta(t)$  sur le plan de reconstruction. La superposition linéaire de toutes les rétroprojections forme l'image reconstruite [12].

L'opération de rétroprojection peut être formalisée selon l'équation (5) où  $\hat{f}(x, y)$  constitue la fonction de distribution reconstruite après rétroprojection:

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi p_\theta(t) d\theta \quad (5)$$

Il faut cependant faire attention à ne pas confondre rétroprojection et inversion de la transformée de Radon; ce sont deux opérations bien distinctes. En effet, la rétroprojection ne donne pas la solution exacte à l'inversion de la transformée de Radon. L'image obtenue après rétroprojection n'est pas exactement l'image recherchée puisque elle s'accompagne d'un flou alors que l'inversion de la transformée de Radon mènerait à une image exacte (l'infinité de projections) [12]. Ces conditions (l'infinité de projections) ne sont évidemment pas réalisées en pratique, car les systèmes d'acquisition permettent d'obtenir des projections pour un nombre fini d'angles (nombre fini de projection), donc l'image obtenue n'est pas la solution mathématiquement exacte du problème d'inversion, mais seulement une approximation de la fonction  $f(x, y)$  [13]. Dans ce qui suit, Nous mettrons l'accent sur une méthode de descente de Gradient.

### 3. Méthode de descente de gradient

Les méthodes itératives consistent à exprimer le problème directement sous une forme discrète. Dans ces méthodes, on veut résoudre  $p = Af$ . Où  $p$  est le vecteur des valeurs dans le sinogramme,  $f$  est le vecteur inconnu de valeurs de pixel dans l'image à reconstruire, et la matrice des coefficients  $A$  est appelée matrice de projection ( $A$  matrice opérateur de Radon) [13]. L'une des techniques de reconstruction itérative est l'algorithme de Descente de gradient. Mathématiquement, l'algorithme de gradient recherche de façon itérativement  $f$  selon l'équation:

$$f^{(k+1)} = f^{(k)} + \alpha^{(k)} A^t (p - Af^{(k)}) \quad (6)$$

Cela signifie que la nouvelle estimation  $f^{(k+1)}$  est égale à  $f^{(k)}$  de l'estimation précédente plus un deuxième terme indiquant la nouvelle direction (choisie pour être opposée au gradient local, et donc dirigée vers la plus grande pente), pondérée par un coefficient  $\alpha^{(k)}$ . Avec  $\alpha^{(k)} \in \mathbb{R}$  représente le facteur de correction. Ce coefficient peut être choisi pour optimiser la convergence du processus. On peut résumer les étapes nécessaires de l'algorithme de descente de gradient en quatre étapes:

- ✓ Calcul projection de L'objet  $\hat{p} = A f$
- ✓ Calcul l'erreur entre Projection mesurée et Projection calculée  $\delta p = p - \hat{p}$
- ✓ Rétroprojection de l'erreur  $\delta f = A^t \delta p$
- ✓ Mise à jour de l'objet  $f^{(k+1)} = f^{(k)} + \delta f$

Le critère de l'algorithme d'optimisation est la minimisation progressive l'erreur entre les projections mesurées et celles estimées. Cette erreur est donnée par :

$$\|p - Af\|^2 \quad (7)$$

On constate, d'après l'équation (6), qu'il s'agit d'une méthode de correction additive.

### 4. Évaluation de la performance

Dans nos simulations, nous avons utilisé une image synthétique qui représente une image à rayon X, 2D fonctionnelle, statique, en niveaux de gris. Nous nous sommes basés sur l'image « Shepp-Logan » de Ali Mohamed-Djafari [14], qui représente une image à rayon X du cerveau humain. L'image « Shepp-Logan » est utilisée dans la majorité des articles qui traitent la tomographie par transmission des images médicales à rayon X. Elle sert à tester les performances des algorithmes de reconstruction, mais aussi la possibilité de reconstruire les intersections du cerveau humain à partir des rayons X.

L'algorithme de Gradient a été implémenté sur un PC en utilisant le langage de programmation Matlab. Pour évaluer les résultats obtenus, quatre critères sont calculés proposés dans [3] en plus de deux erreurs de normes relatives et la qualité visuelle des images reconstruites résultantes. Les mesures de qualité sont énumérées ci-dessous:

➤ **L'erreur de norme relative des images** [6] résultantes est définie comme suit:

$$df = \frac{\|f - \hat{f}\|^2}{\|f\|^2} \quad (8)$$

Tel que  $f$  est l'image de test, et  $\hat{f}$  l'image reconstruite.

➤ **L'erreur de norme relative des projections** simulées et défini comme :

$$dp = \frac{\|p - \hat{p}\|^2}{\|p\|^2} \quad (9)$$

Tel que  $p$  est la projection mesurée, et  $\hat{p}$  la projection simulée.

➤ **Mean Square Error (MSE)**: c'est la mesure entre l'image de test et l'image reconstruite et définie par:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [f_j - \hat{f}_j]^2 \quad (10)$$

Où  $f_j$  est la valeur du pixel dans l'image de test et  $\hat{f}_j$  est la valeur du pixel dans l'image reconstruite,  $N$  est le nombre total de pixels.

➤ **Normalized cross-correlation (NCC)**: égale la double somme de la valeur Carré d'une différence entre l'image originale et l'image de reconstruite sur double somme de la valeur Carré de l'image originale est défini comme:

$$NCC = \frac{\sum_{j=1}^N [f_j - \hat{f}_j]^2}{\sum_{j=1}^N [f_j]^2} \quad (11)$$

➤ **Structural content (SC)** : égale la double somme de la valeur Carré de l'image originale sur la double somme de la valeur Carré de l'image reconstruite est défini comme:

$$SC = \frac{\sum_{j=1}^N f_j^2}{\sum_{j=1}^N \hat{f}_j^2} \quad (12)$$

➤ **Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)**: est défini comme:

$$PSNR = 10 \log \left( \frac{255}{\sqrt{MSE}} \right) \quad (13)$$

Un autre critère pour les techniques de reconstruction tomographique est le nombre d'itérations et le nombre de projections utilisées dans le processeur de reconstruction. La Figure 3 illustre l'image « Shepp-Logan » que nous avons utilisés et ses Projections (sinogramme).

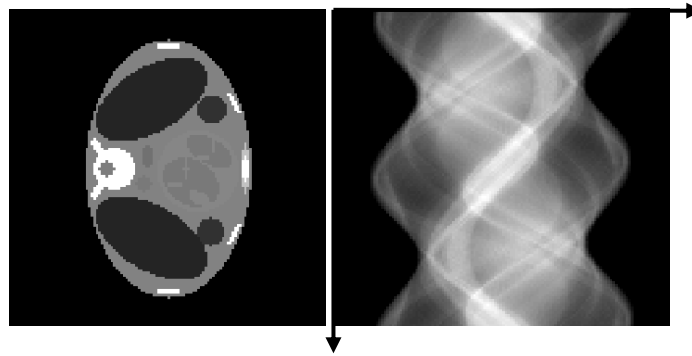


Fig. 3 : (Gauche) « Shepp-Logan » de taille (128x128). (À droite) correspondant sinogramme, avec Les angles de projection varient entre  $0^{\circ}$  et  $180^{\circ}$  avec un pas de  $10^{\circ}$  (i.e. 18 projections).

## 5. Résultats et discussions

Dans cette section, nous présenterons les résultats de reconstruction de la méthode de descente de Gradient. Les performances de reconstruction sont calculées par rapport au nombre de projections et le nombre d'itérations. Pour mieux voir l'influence de ce nombre sur la qualité de l'image reconstruite, nous illustrons dans la figure 4 les images résultantes, pour les différentes valeurs d'itérations. Nous pouvons facilement remarquer l'amélioration de la qualité de reconstruction avec l'augmentation du nombre d'itérations.

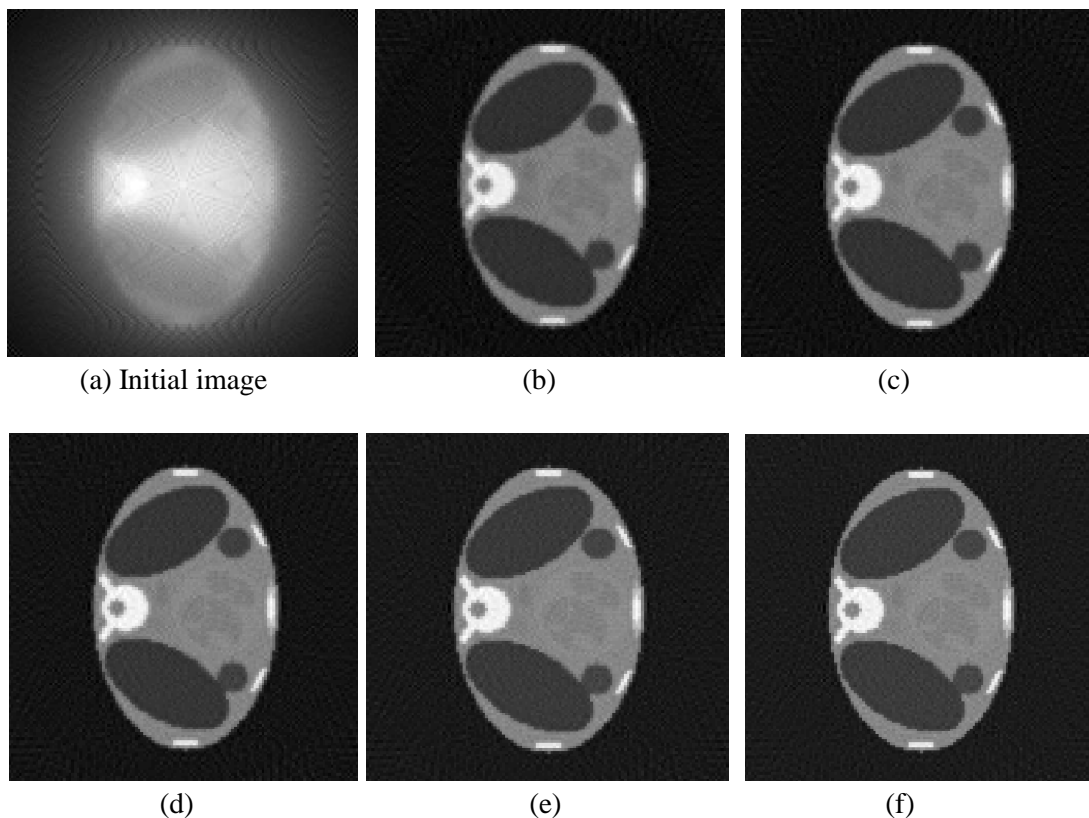


Fig. 4: Images reconstruites par descente de gradient. En utilisant (b) 20, (c) 60, (d) 100 (e) 200 et (f) 500 itérations

La variation des critères d'évaluation ( $df$ ,  $dp$ , MSE, NCC, SC et PSNR) en fonction du nombre de projections de l'image «Shepp-Logan» sont indiquées dans La Figure 5, en utilisant l'algorithme de gradient pour 200 itérations.

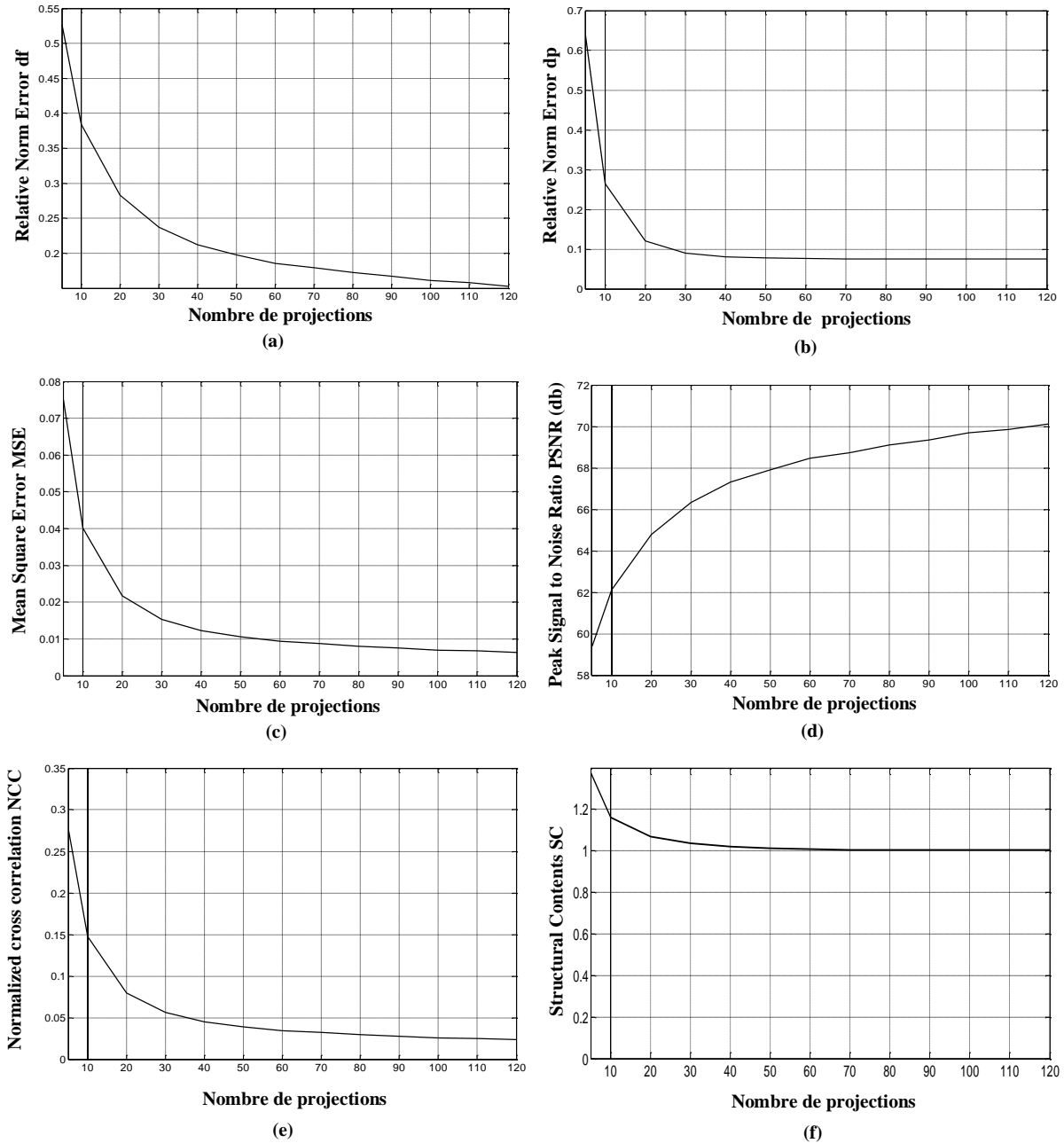


Fig. 5: Variation des Critères d'évaluation en fonction du nombre de projections pour descente de Gradient. En utilisant 200 itérations (a) **df**, (b) **dp**, (c) **MSE**, (d) **PSNR**, (e) **NCC** et (f) **SC**. Image de test «Shepp-Logan »

D'après les graphes (Fig.5) nous constatons que le nombre de projections joue un rôle crucial dans la reconstruction. Quand le nombre de projections augmente, les paramètres d'évaluation (**df**, **dp**, **MSE**, **NCC**, et **SC**) diminuent. Cette diminution est très rapide pour un nombre de projections entre 1 et 20 et lente au-delà de 20 projections, par contre une augmentation significative de **PSNR**. quand le nombre de projections augmente, la qualité de l'image reconstruite est plus proche de l'image originale c.-à-d. Plus ce nombre est important, plus la reconstruction est bonne.

Nous pouvons facilement remarquer, d'après les résultats présentés dans le tableau I, les valeurs des critères (**df**, **dp**, **MSE**, **NCC**, et **SC**) sont plus faibles, ce qui signifie qu'il y a une faible erreur, correspondent à des valeurs élevées de **PSNR**. Logiquement, une valeur plus élevée de **PSNR** est bonne parce que cela signifie que le rapport de signal sur bruit est plus élevé. Ici, le «signal» est l'image de test, et le

«bruit» est l'erreur dans la reconstruction. Le nombre d'itérations dans le processus de l'algorithme de descente de gradient est très nécessaire pour améliorer la qualité de reconstruction. L'erreur est importante pour un nombre d'itérations petit. Quand le nombre d'itérations augmente, la valeur de l'erreur commence à décroître (tableau II).

TABLEAU-I : VARIATION DES CRITERES D'EVALUATION EN FONCTION DU NOMBRE DE PROJECTIONS POUR L'ALGORITHME DE GRADIENT. EN UTILISANT 200 ITERATIONS

Critères d'évaluation	Descente de Gradient			
	200 Itérations			
	3 Projections	16 Projections	32 Projections	64 Projections
<i>df</i>	0.6056	0.3177	0.2323	0.1834
<i>dp</i>	0.0143	0.0054	0.0043	0.0042
<i>MSE</i>	0.0996	0.0274	0.0147	0.0091
<i>PSNR</i>	58.1818	63.7843	66.5048	68.5572
<i>NCC</i>	0.3669	0.1010	0.0540	0.0336
<i>SC</i>	1.5762	1.0962	1.0350	1.0084

TABLEAU-II: VARIATION DES CRITERES D'EVALUATION EN FONCTION DU NOMBRE D'ITERATIONS POUR L'ALGORITHME DE GRADIENT.

Critères d'évaluation	Descente de Gradient	
	100 Itérations	200 Itérations
<i>df</i>	0.1308	0.1204
<i>dp</i>	0.0017	0.0010
<i>MSE</i>	0.0047	0.0039
<i>PSNR</i>	71.4887	72.2120
<i>NCC</i>	0.1740	0.0145
<i>SC</i>	1.0296	1.0225

## 6. Conclusion

En guise de conclusion, La reconstruction tomographique est considérée comme un problème inverse dont la résolution exacte et directe est délicate. Les données initiales de ce problème inverse sont les projections de l'objet étudié, mesurées autour de celui-ci. La reconstruction tomographique est l'art de la reconstruction d'image à partir de ses projections. Dans ce travail, nous avons présenté le principe de base de la reconstruction des objets à partir de leurs projections. Nous avons montré qu'il n'existe pas de solution unique dans la reconstruction tomographique ; il existe toujours plusieurs objets qui peuvent être à l'origine d'un ensemble fini de projections. Les résultats obtenus ont montré que la méthode descente de gradient nous a permis une amélioration considérable de la qualité de reconstruction surtout pour un nombre important de projections et d'itérations.



## 7. Références

- [1] Q. Zhong, W. Junhao, Y. Pan, Algebraic Reconstruction Technique in Image Reconstruction with Narrow Fan Beam. *IEEE Trans. Medical Imaging*. 52(5):1227-1235, 2005.
- [2] L. Bao-dong, L. Zeng, J. Dong-jiang, Algebraic Reconstruction Technique Class for Linear Scan CT of Long Object. In. *Proc. the 17th World Conference on Nondestructive Testing*. Shanghai, China, October 2008.
- [3] S. D. Desai, L. Kulkarni, A Quantitative Comparative Study of Analytical and Iterative Reconstruction Techniques. *International Journal of Processing (IJIP)*. 4(4):pp. 307-319, October 2010.
- [4] M. M. Anishinraj, B. Venkataraman, V. Vaithyanathan, A Comparative Study and Experimentation of Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART) and Ordered Subsets Expectation Maximization (OSEM). *Eur. J. Sci. Res.* 4(68):584-590, 2012.
- [5] J. Radon, On the Determination of Functions from Their Integrals Along Certain Manifolds. *Ber Verh Sachs Akad Wiss.* 69: 262-277, 1917.
- [6] A.C. Kak and M. Slaney, Principles of computerized tomographic imaging. IEEE Press, 1988.
- [7] PB Philippe, Analytic and Iterative Reconstruction Algorithms in SPECT. *J. Nucl Med.* 43(10):1343-1358, 2002.
- [8] F. Natterer, the Mathematics of Computerized Tomography. Wiley, 1986.
- [9] G.T. Herman, Image reconstruction from projections. New York: Academic Press, 1980.
- [10] P. Grangeat, La tomographie: Fondement mathématiques. *Imagerie microscopique et imagerie industrielle*. Paris, Hermès Science Publication, 2002.
- [11] H. F. Frederic, Data acquisition in PET imaging, *Journal of Nuclear Medicine Technology*. 30(2):39-49, June 2002.
- [12] J. Benech, Spécificité de la mise en oeuvre de la tomographie dans le domaine de l'arc électrique-validité en imagerie médicale. Thèse de doctorat, Université Toulouse III, Décembre 2008.
- [13] D. T. Nguyen, Développement d'algorithmes de reconstruction tomographique Pour l'analyse pixe d'échantillons biologiques. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Mai 2008.
- [14] A.M. Djafari, <http://djafari.free.fr/>.