مجلة المعارف للبحوث و الدراسات التاريخية
https://www.asjp.cerist.dz/en/PresentationRevue/111
ISSN: 2437-0584/ EISSN: 2437-0584
المجلد الثامن ،العدد الثالث ،جوان 2023 ص- ص110-159.

علم الحساب في التقليد الرياضي العربي (تصنيفه وأسسه)

Arithmetic in the Arab Mathematical Tradition (its classification and basis).

غرابة وسيلة (*)
مخبر الإبستمولوجيا وتاريخ الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة، o.gheraba@yahoo.fr

تاريخ الاستلام: 26 /2022/10 تاريخ القبول: 27 /2023/05 تاريخ النشر: 10 /2023/06

الملخص: أظهرت مؤلفات تصنيفات العلوم في الحضارة الإسلامية أبرز العلوم المدروسة، وبينت أهمية كل علم من تلك العلوم بالنسبة للعلوم الأخرى، وقد كان ذلك حسب اهتمامات مؤلفيها وزمان كتابتها. من بين العلوم المصنفة علم الرياضيات وكفرع منه علم الحساب، تعطينا تصنيفات العلوم الخطوط العريضة لمحتوى التقليد الرياضي العربي، ومن ضمنه محتوى وتقسيمات مادة الحساب وأهميتها بالنسبة لفروع الرياضيات الأخرى. الأركان العامة المستخرجة من تصنيفات العلوم لمادة الحساب نجدها مفصلة من خلال دراسة مصنفات ومؤلفات ورسائل مادة الحساب، سندرس هذه الأركان والأسس في هذا المقال.

الكلمات الدالة: التراث الرياضي العربي ، تصنيفات الرياضيات العربية ، الحساب العربي ، الخوارزميات العربية.

Abstract: The books of the classifications of sciences in Islamic civilization showed the most prominent sciences studied, and indicated the importance of each of those sciences in relation to other sciences, and this was according to the interests of their authors and the time of their writing. Among the sciences classified is mathematics and as a branch of it, arithmetic, the classifications of sciences give us an outline of the content of the Arab mathematical tradition, including the content and chapters of arithmetic and its importance in relation to other branches of mathematics. The general basis of arithmetic extracted from the science classifications of arithmetic, we find detailed by studying the compilations, writings and treatises of arithmetic, we will study these basis in this article.

Keywords: Arab mathematical tradition, classifications of Arabic mathematics, Arabic arithmetic, Arabic algorithms.

*المؤلف المرسل.

1.مقدمة: مع توسع الحضارة الإسلامية وتشعب العلوم فيها، اضطلعت مجموعة من العلماء منهم الفلاسفة والمؤرخين بتصنيف المعرفة وخصّصوا لها مؤلفات، من بينها تصنيف الرياضيات بالنسبة للعلوم الأخرى، ويمكن أن نستنتج منها تصنيف مادة الحساب وعلم العدد بالنسبة لمادة الرياضات.

ومع تخصّص كل علم وأيضا تخصصّ كل مادة في كل علم، اهتم الرياضيون في التقليد الرياضي العربي بعلم الحساب كمادة قائمة بذاتها، واهتموا مع الوقت بإعطاء تعاريف ومفاهيم خاصة بها وأفردوا لها عناوين ومؤلفات.

تُجمع كتب علم الحساب وإن اختلف اللفظ على أن تعريف الحساب هو : "استخراج الأعداد والمقادير المجهولة من المعلومة"، أما أصول الحساب التي عُرّفت وحُدّدت مع تطور الحساب فهي ثلاثة أصول : المراتب والعقود والأسماء. المراتب هي ثلاثة وهي الوحدات والعشرات والمئات وتتبعها ثلاث مراتب شبيهة لها فيها لفظة الألوف. العقود هي تسعة وهي من واحد إلى تسعة. والأسماء هي إثني عشر إسما وهي من واحد إلى العشرة ثم المائة والألف.

هذه التحديدات لتعريف الحساب وأصوله لم تُذكر بهذه الصيغة المحدّدة في كل كتب الحساب منذ بداية تأليفها وإنما ذُكرت مع تطور علم الحساب، لا نجدها مثلا في كتاب **الفصول في الحساب الهندي** للأوقليديسي (ق.4هـ/10 م)، **فيما يحتاج إليه الكتاب والعمال وغيرهم من علم الحساب** والمعروف باسم **المنازل السبعة** لأبي الوفا البوزجاني(348 -388 هـ/959-998 م)، **التكملة في الحساب** لعبد القاهر البغدادي(ق.4هـ/10م)، **أصول حساب الهند** لكوشيار بن لبان الجيلي(النصف الثاني من القرن4هـ/ 10م)، **تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار** لابن الياسمين(ت. 601 هـ/5-1204 م)، لكننّا نرى بداية لهذا التحديد في الشرق الإسلامي مع نهاية القرن الخامس الهجري /الحادي عشر الميلادي في كتاب **كتاب مختصر الهندي** للصردفي(ت.500 هـ/1107م)، وفي الغرب الإسلامي مع نهاية القرن السادس الهجري /الثاني عشر الميلادي في كتاب **البيان والتذكار في صنعة عمل الغبار** للحصّار(ق.6هـ/12م).

نجد هذه التعاريف والأصول لعلم الحساب بهذه الصيغة والنضج في **كتاب التبصرة في علم الحساب** للسموؤل المغربي (ت. 570هـ/ 1174 م) ومن أتى بعده من الحسّاب خصوصا مؤلفي كتب الحساب الهندي، وهذا لا يعني أن السموأل هو أول من أصّل لهذه التعاريف والتحديدات. أما الكتب المصنفة ضمن كتب حساب اليد فنجد هذا التأصيل والتحديد انطلاقا من القرن السابع الهجري/الثالث عشر الميلادي وهو ما نراه في كتاب **إرشاد الحسّاب في المفتوح من علم الحساب** لابن فلوس (593-637 هـ/1196-1239م) حيث يعتبر مراتب العدد أربعة وهو ناتج على ما يبدو من ترسّبات حساب اليد لأن أكبر عدد تشغله اليدين هو من مراتب الآلاف، ولاحقا مع كتب الحساب الهوائي في كتاب **عمدة الحسّاب** للزنجاني(ت.660 هـ/1261م) وابن الهائم (ت.815 هـ/1412م) في كتابه **المعونة** حيث يذكران أن مراتب العدد ثلاثة والأخرى نائبة.

لم يكن هناك اختلافات كثيرة بين أنواع ومؤلفات الحساب، لا من حيث المحتوى المدروس ولا من حيث الأركان التي تأسّس عليها هذا العلم ولا حتى في ترتيب أبوابه. ولكن كان هناك بالتأكيد تطوّر في المضمون تماشى مع تطوّر المواد الأخرى المعالجة في التقليد الرياضي العربي، مرافقا للتطور الحاصل في شتى العلوم العربية الأخرى عبر التاريخ الإسلامي الطويل و الجغرافيا الممتدة للبلاد الإسلامية، من دون أن ننسى الروافد والموروثات الكثيرة سواء المحلية أو موروثات حضارات أخرى استقى منها العلماء في التقليد الرياضي العربي معرفتهم وقاموا بإضافات هامة عليها ثم نشروها.

2. . تصنيف علم الحساب بالنسبة لتصنيفات العلوم في الحضارة الإسلامية

بدأت تصنيفات المعرفة في الحضارة الإسلامية مع العهد العباسي الأول (132-232هـ/750-847م)، حيث وضع جابر بن حيان (ق. 2 هـ/8 م) والكندي (ت. حوالي 260 هـ/873 م) البذور الأولى لتقسيم العلوم، الأول بكتابيه **السباعية** و**الحدود** حيث لم يعتبر فيه الرياضيات علما من العلوم، والثاني بمؤلفه **كمية كتب أرسطو طاليس**، حيث يقسم

الكندي العلوم مبتدئا بالرياضيات باعتبارها مدخلا لكل العلوم، وبالحساب مدخلا للرياضيات قبل الموسيقى والهندسة والهيئة.[1]

أمّا في العصر العباسي الثاني (232 -447 هـ/847-1056 م) اشتهر عدة مصنفين أولهم الفارابي (ت.339هـ/950 م) وكتابه **إحصاء العلوم** حيث يعتبر فروع الرياضيات من علم التعاليم في الترتيب الثالث بعد كل من علم اللسان وعلم المنطق، ويجعل علم العدد الأول في الترتيب. يقسّم الفارابي علم العدد إلى علم العدد العملي الذي يفحص الأعداد من حيث هي أعداد معدودات تحتاج إلى أن يضبط عددها من الأجسام وغيرها، يتعاطاها الجمهور في المعاملات السوقية والمعاملات المدنية. وعلم العدد النظري يفحص الأعداد على أنها مجردة في الذهن عن الأجسام وعن كل معدود وهو يدخل في جملة العلوم. [2] وكأنه بذلك يجعل علم العدد العملي لعامة الناس وعلم العدد النظري خاص بالعلماء.

في كتاب **رسائل إخوان الصفا وخلان الوفا** (ق.3هـ/9-10م) يذكر مؤلفوها أن : " الرياضيات أربع أنواع أولها الأرثماطيقي(معرفة خواص العدد)، والثاني الجومطريا(الهندسة)، الثالث الأسطرنوميا(علم النجوم)، والرابع الموسيقى....فأول ما يبتدأ النظر في هذه العلوم الفلسفية الرياضيات، وأول الرياضيات معرفة خواص العدد لأنّها أقرب العلوم تناولا"[3].

الخوارزمي (ت.387 هـ/997 م) في **مفاتيح العلوم** يقسّم العلوم إلى علوم الشريعة وما يتصل بها من علوم العرب وعلوم العجم من اليونانيين وغيرهم من الأمم. يسمي الباب الرابع بالأرثماطيقي ويعتبره من علم العجم ويعرّفه بأنّه علم العدد، ويقسّمه الى خمس فصول الأول في الكمية المفردة، الثاني في الكمية المضافة، الثالث في الأعداد المسطّحة والمجسّمة، الرابع في العيارات(تشبه النسب)، والخامس في حساب الهند وحساب الجمل ومباديء الجبر.[4] فالفصول الأربعة الأولى تتعلق بخواص العدد والفصل الأخير خاص برقوم الأعداد والحساب.

ثم يأتي تصنيف ابن النديم (ق. 4 هـ/10 م) في **الفهرست**، حيث يحصر الكتب المؤلفة باللغة العربية أو المترجمة إلى العربية التي نُشرت في العالم الإسلامي في مختلف العلوم مع التعريف بمؤلفيها، قسّم المعرفة إلى عشر مقالات، وكل مقالة إلى عدة فنون، في المقالة السابعة خصّصها

للفلسفة والعلوم القديمة، وفي الفن الثاني منها في أخبار أصحاب التعاليم، من أصحاب التعاليم ذكر الأرثماطقيين والحسّاب كل على حدة[5].

أما ابن سينا (ت. 427 هـ/7-1038 م) في **أقسام العلوم العقلية** لا يذكر العلوم النقلية، ويقسّم العلوم وفق تصوره الفلسفي للعلوم العقلية إلى ثلاث حِكم، الأولى هي النظرية يتوسطها العلم الرياضي والذي يشتمل على عدة فروع يتصدرها علم العدد ثم الهندسة، ثم الهيئة ومن ثم علم الموسيقى، ومن فروع علم العدد علم الجمع والتفريق بالهندي والذي يقصد به العمليات الحسابية، ثم الجبر والمقابلة.[6]

يقول ابن سينا في نهاية كتابه **الشفاء** :"فهذا ما نقوله في علم الأرثماطيقي، وقد تركنا أحوالا اعتبرنا ذكرها في هذا الموضع خارجة عن قانون الصناعة، وقد بقي في علم الحساب ما يغني في الإستعمال والإستخراج ، وهو في العمل مثل الجبر والمقابلة والجمع والتفريق الهندي وما يجري مجراها، والأولى في أمثال ذلك أن تذكر في الفروع"[7]، فابن سينا يعتبر أن أصل علم الحساب هو العدد وخواصه، وأما ما يتعلق بالميادين الأخرى المتعلقة بالعدد فهي فروع.

أما تصانيف تقسيم العلوم من القرن السادس إلى أواخر القرن التاسع هجريين/القرن الثاني عشر إلى أواخر القرن الخامس عشر الميلاديين، فنجد نصير الدين الطوسي (ت.672هـ/1274م) يقسّم العلوم في مقدمة كتابه **أخلاق ناصري** من دون تفصيل، فيقسّم الحكمة إلى ثلاثة أقسام سمّاها علوم، كل قسم مشتمل على عدة أجزاء يكون البعض منها بمثابة الأصول والبعض الآخر بمنزلة الفروع، أول الحكم الحكمة النظرية، بدورها تنقسم إلى ثلاثة علوم، ثانيها العلم الرياضي والذي بدوره ينقسم إلى أصول وفروع، أول الأصول معرفة المقادير وهو علم الهندسة، الثاني معرفة الأعداد وخواصها وهو علم العدد، الثالث معرفة الأجرام وهو علم النجوم، الرابع معرفة النسب وهو علم التأليف يقع فيه علم الموسيقى، ومن فروع العلم الرياضي الجبر والمقابلة.[8]

تصنيف ابن الأكفاني (ت.749 هـ/1348م) في كتابه **إرشاد الطالب إلى أسنى المقاصد**، الغاية منه تربوي تعليمي فيضع العلم الرياضي ضمن حكمة عملية، ويرتب فيه علم

الحساب الثالث، ويعتبر علم الحساب كعلم متفرع من علم العدد الذي يسميه الأرثماطيقي، ويقسّم علم الحساب إلى : علم الحساب المفتوح الذي لا يتقيد برقوم خطية بل يكتفي بالصور الخيالية، حساب التخت والميل فكرته العدد المعلوم المقيد برقوم خطية، أما الباحث عن المجهولات واستخراجها فهناك ما يتوقف على التناسب وهو حساب الخطأين الذي يختص بأربعة أعداد متناسبة، وما لا يختص بالتناسب هي حساب الجبر والمقابلة، حساب الدور والوصايا، وحساب الدرهم والدينار.[9]

أما إبن خلدون (ت. 808 هـ/1406م) في كتابه **العبر وديوان المبتدأ والخبر العبر وديوان المبتدأ والخبر**، يصنف العلوم حسب تدرجها في الدراسة، كما ينسب أشهر مؤلفي هذه العلوم لمؤلفيها، فيضع العلوم العددية أو العلم الرياضي أو علوم التعاليم ضمن العلوم العقلية، أول أجزاء التعاليم وأثبتها الأرثماطيقي، وهو معرفة خواص الأعداد من حيث التأليف إما على التوالي أو بالتضعيف، ويدخل حسبه في البراهين لا في الحساب، ومن فروع علم العدد صناعة الحساب، الجبر والمقابلة، المعاملات، وتصريف الحساب في المعاملات، وعلم الفرائض.[10]

من تصانيف العثمانيين نذكر طاشكبرى زاده (ت. 968 هـ/1561م) في كتابه **مفتاح السعادة ومصباح السيادة** له اتجاه تربوي تعليمي، يصنف العلوم بتدريج دراستها في ذلك الوقت، فهو يقسم العلوم إلى درجات، يرتب العلوم الرياضية في الشعبة السادسة من الدرجة الرابعة، في القسم الثالث منها ترتيب علم العدد (وهو المتعلق بخواص العدد)، وفي الشعبة التاسعة من الدرجة الرابعة أيضا يضع فروع العدد، وبالتالي فهو يضع العلوم الرياضية وفروع العدد في كفة واحدة وفي نفس الدرجة، ويقسم فروع العدد إلى علم حساب النخت والميل، علم الجبر والمقابلة، علم حساب الخطأين، علم حساب الدور والوصايا، علم حساب الدرهم والدينار، علم حساب الفرائض، علم حساب الهواء، علم حساب العقود، علم أعداد الوفق، علم خواص الأعداد المتحابة والمتباغضة، علم التعابير العددية في الحروف.[11]

من الكتب اللاحقة في الفترة العثمانية والتي استفادت كثيرا من كتاب طاشكبرى زاده، نجد كتاب **كشف الظنون** لحاجي خليفة (1068هـ/1657م) حيث يتكلم في مقدمة كتابه عن العلم بصفة عامة من ناحية التعريف والماهية والغاية والمواضيع عند القُدماء والفلاسفة وما يتصل به من الاختلاف والأقوال، ويذكر خمس أنواع من تقسيمات العلوم، آخرها تقسيم طاش كبرى زاده في كتابه **مِفتاح السعادة** والذي فصّل فيه كثيرا، حيث قال عنه: "وهو أحسن من الجميع". أمَّا عن مُشتملات الكتاب، فهو يذكُر مُعظم الكتب وأسماء العلوم والفنون، رتب كتابه على حروف المعجم تفاديا للتكرار حسب قوله، فيبدأ بالألف يقول: باب الألف ، ثم الباء ثم التاء...الخ. يقول عن علم الأرتماطيقي: "وهو علم يبحث عن خواص العدد".[12]

ما يمكن استنتاجه من هذه التصانيف المختلفة، أن الرياضيات بدأت في التصانيف الأولى للعلوم بأربع فروع من ضمنها الأرتماطيقي، تشعبت مع العصور حتى أصبح فرع من فروعها والمتعلق بالعدد وخواصه ينقسم بدوره إلى عدة أقسام، والحساب على الأعداد إلى عدة أنواع.

صنفت الرياضيات ضمن أوائل العلوم في تصانيف الفلاسفة واحتل الصدارة فيه علم العدد وخواصه، وسمي الأصل عند بعضهم وعند البعض الآخر علم العدد النظري، وجُعلت العمليات الحسابية من فروع العدد أو سميت بعلم العدد العملي.

ما يلاحظ أن الرياضيات تدجرجت في تصنيفاتها مع تدهور واختلاف السلطة قي الحضارة الإسلامية ومع تطاول الأزمنة، ففي تصنيف العثمانيين مثلا لا يبدو أن علم الرياضيات احتل مكانة هامة مثلما احتلتها الرياضيات من قبل، ونلاحظ توسّع وتفرع علم الحساب إلى عدة أقسام وهذا حسب الأدوات وأهمية الميادين والعلوم التي طُبّقت فيها مثل الفرائض والمعاملات.

بشكل عام فعلم الحساب ينقسم حسب هذه التصانيف إلى علم العدد النظري وهو الذي يدرس العدد من حيث ماهيته وخواصه وتركيباته، وعلم العدد التطبيقي وهو الذي يدرس تطبيقات الحساب المتمثلة في العمليات الحسابية وخوارزميات حل المسائل، والأدوات المستخدمة في تطبيقات الحساب وهي الأرقام من حيث كيفية تمثيلها ونظام عدّها.

3. أركان وأسس علم الحساب العربي

يتأسّس علم الحساب في التقليد الرياضي العربي على خمس أسس: نظام العد، تمثيل الأرقام، العمليات الحسابية، الخوارزميات الحسابية، نظرية الأعداد. هذه الأسس الخمس بشكل عام تحوي المواضيع المدروسة في كتب الحساب العربي.

تنتظم هذه الأسس في كتب الحساب بظهور أولا علم العدد التطبيقي والتقني مرتباً بالشكل التالي : نظام العد وتمثيل الأرقام، ثم العمليات الحسابية، بعدها الخوارزميات الحسابية التي تظهر في حل المسائل، ثم يظهر الشق النظري المتعلق بنظرية الأعداد هذا الشق الأخير توجد من الكتب الحسابية ما تُدمجه، وهناك من المؤلفات ما لا تهتم بدراسته فلا يُذكر أو يمكن أن نجد مؤلفات مكرّسة له فقط.

يتغير الترتيب نوعا ما مع النصف الثاني من القرن السابع الهجري/ القرن الثالث عشر الميلادي، وهو ما نلاحظه مثلا في كتاب **عمدة الحسّاب** وكتب أخرى للحساب في القرن اللاحق مثل **المعونة** لابن الهائم و**مراسم الانتساب في معالم الحساب** ليعيش بن ابراهيم الأموي (ع. 774 هـ-1353 م)، **رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب** لابن البنا المراكشي (654-721هـ/1256-1321م)، بحيث تظهر مفاهيم العدد وخواصه جنبا إلى جنب مع تمثيل الأرقام وتعريف رتب العدد في بداية مؤلفاتهم.

الشق التقني والتطبيقي في كتب الحساب تظهر فيه التعاريف الخاصة به ولا تحتاج إلى برهان وهي المرتبطة بنظام العد وتمثيل الأرقام، أما العمليات الحسابية وكذا خوارزميات المسائل فتذكر تعاريفها وطرق الحساب والقواعد فيها من دون ذكر البرهان عليها، كذلك الأمر بالنسبة إلى نظرية الأعداد، فالبرهان قائم في كتب مواد أخرى منها الهندسة والجبر، وكتب الحساب هي كتب تطبيقية الغرض منها حل مسائل الحياة اليومية للفرد العادي وفئة الصناعيين والحرفيين والتجار والفرضيين ولهياكل الدولة لهذا فهي لا تذكر البراهين.

الأسس التي يقوم عليها الحساب العربي هي:

1.نظام العد

أُستخدم نظامين للعد عشري وستيني، استخدم نظام العد العشري في حساب اليد آليا لأن عدد أصابع اليد هو عشرة، واستخدم عقد الأصابع للدلالة على العقود وذلك للإنتقال من منزلة إلى أخرى، كما استخدم النظام العشري أيضا بدخول الحساب الهندي المنازلي ويتميز بأهمية الموضع والترتيب وأهمية العدد صفر.

في النظام العشري استخدمت المراتب أو ما يعرف بالمنازل، يوجد من الرياضيين من جعلوا للعدد أربع مراتب أساسية مثل الأقليديسي **الفصول في الحساب الهندي، إخوان الصفا وخلان الوفا**، والكرجي (نهاية القرن4 وبداية القرن 5 الهجريين/القرن 10 وبداية القرن 11 الميلاديين) في كتابه **الكافي في الحساب**، ابن فلوس في **إرشاد الحسّاب على المفتوح من علم الحساب**، الصردفي في **كتاب مختصر الهندي** كما يوجد من اعتبر أن للعدد ثلاثة مراتب كالزنجاني في كتابه **العمدة** وأيضا أبو الوفا في **المنازل السبعة**، السموأل في **التبصرة**، وهناك من لم يتحدث عن عدد المراتب، مثل الزنجاني في **الكافية والعزية**، البغدادي في**التكملة**، ابن الياسمين في **التلقيح**، الحصّار في **البيان والتذكار**.

تسميات هذه المراتب قديما هي الوحدات ثم العشرات ثم المئات ثم الألوف وباقي المراتب تدور على تكرار هذه التسميات، وهذا ما يقودنا إلى التساؤل عن السبب في أن عدد التسميات الأساسية للمراتب هي أربعة، ربما كان ذلك بسبب أن الحساب القديم متعلق بحساب اليد والذي يمكنه شغل حتى العدد 9999 أي يشغل أربعة مراتب فقط.

النظام الثاني المستخدم في التقليد الرياضي العربي هو نظام العد الستيني، سُمي هذا النظام في الكتب العربية طريق المنجمين وحساب الزيج وحساب الدرج والدقائق،[13] فاستخدم وبقي منفردا وخاصا بميدان الفلك وحساب النجوم لاحقا في الحضارة الإسلامية.

فرض الحساب الستيني نفسه على غير الفلكيين فاستعمله عامة الناس في كتب الحساب خاصة الكتب الأولى في حساب اليد، حيث أفرد كل من أبو الوفا البوزجاني في كتابه **فيما يحتاج إليه الكتاب والعمال وغيرهم من علم الحساب** والمعروف **المنازل السبعة** والكرجي في

كتابه **الكافي في الحساب** فصولا في الحساب الستيني والعمليات عليه، يقول الكرجي في كتابه **الكافي** : "باب ذكر النسبة إلى الستين، اعلم أن القدماء جعلوا النسبة إلى الستين مثالا يُتصور به النسبة ويفهم إلى الحد الذي يُكتفى به، لأن الستين يصح منها ستة كسور، ولهذا انقسم إليها الكسر والدرهم والدينار والدرجة وكثير من المقادير التي يتعامل بها الناس"[14]، فقد استخدمت وحدات الستين كوحدات للمكاييل والأثمان والأوزان والمثاقيل والأطوال في المعاملات وذلك حسب الأمصار في الدولة الإسلامية، وقد نتج عن ذلك باب في الحساب اسمه تحويل الكسور في الفصل الخاص بالكسور، وهو باب يسمح بتحويل وحساب هذه الوحدات فيما بينها ومن بينها وحدات تستعمل نظام الستين، وهذا الباب بقي ظاهرا في كتب الحساب بصفة عامة وفي فترات مختلفة ولاحقة ولهذا الهدف استعمل مزيج من الحساب الستيني والحساب العشري.

2. الأعداد وتمثيلها

الأعداد هي الوسائل والأدوات التي تجرى عليها العمليات من جمع وطرح وقسمة وضرب وتجذير، هي على نوعين معلومة ومجهولة :

النوع الأول هو الذي تكون أدواته معلومة وهي الأعداد المعلومة بأرقامها وتجرى العمليات عليها وعلى أجزائها وعلى مراتبها وهذا النوع هو الخاص بكتب الحساب، حيث دُرست العمليات على الأعداد الطبيعية والناطقة المسمّاة في التقليد الرياضي العربي الصّحاح والكسور، حيث سميت الكسور أعداد مُنطقة وما تُلفظ بالجزئية التي يقال لها أحيانا الصمّاء، أما الأعداد غير الناطقة فهي تتعلق بالجذور وتسمّى أيضا صمّاء في الحساب العربي، وهي على قسمين قسم يُلفظ فيه بالجذر مرة واحدة ويسمى المنطق بالقوة وقسم يلفظ فيه الجذر أكثر من مرة واحدة ويسمى الموسط، عرّفت عدة أنواع من الجذور مثل ذوات الإسمين وذوات الإسمين

المنفصلات. لقد عرف الرياضيون في التقليد الرياضي العربي أن الأعداد الصمّاء تشمل أيضا أعداداً ليست جذرية مثل نسبة محيط الدائرة إلى قطرها.

لتمثيل الأعداد المعلومة استخدم الحاسب :

أ. التمثيل اللفظي حيث تلفظ أسماء الأعداد (الصحاح والكسور والجذور) وتكتب بحروفها، واستخدم خاصة في كتب حساب اليد والمفتوح والهوائي وهو ما نجده مثلا في كتاب أبو الوفا البوزجاني **المنازل السبعة** في القرن العاشر الميلادي، وبقي مستخدما في التقليد الرياضي العربي فنجده مثلا في كتاب الزنجاني **عمدة الحسّاب** في القرن الثالث عشر الميلادي.

ب. تمثيل صُوَري

1. بالنسبة للصّحاح فقد كان تمثيلها على نمطين :

- أشكال للأرقام التسعة مع الصفر، وتسمى بحروف التراب وبحروف الغبار، وهي على صورتين الأولى في دول الشرق الإسلامي والثانية في دول الغرب الإسلامي وهي لا تختلف في شيء سوى في رسم الأرقام. ارتبطت هذه الصور بالحساب الهندي حيث ساهم تمثيل الأرقام في الحساب الهندي على تصغير المساحة التي تشغلها عادة الأعداد خاصة منها الكبيرة، كما ساهم قي إزالة التعقيد في الكتابة اللفظية أو الرمزية التي كانت تستخدم قبل دخول النظام الهندي.

- صور الأرقام هي حروف، وهو نظام عد أبجدي يسمى حساب الجمل، وتكتب على نمطين أحدهما يستخدم في الشرق الإسلامي والآخر في الغرب الإسلامي. نظام العد الأبجدي موروث من الممارسات الفلكية اليونانية وقد بقي مستعملا في علم الفلك في بلاد الإسلام، وكان موجود أيضا في التقليد القبطي ولكن برموز يبدو أنها مشتقة من أحرف الأبجدية اليونانية، وهو حال أيضًا الحساب البيزنطي (المعروف بأرقام registres أو أرقام فاس) الذي لا تختلف رسومه واستخدامه عن الأرقام القبطية[15]. مع الوقت أصبح التمثيل الأبجدي في النظام الستيني خاصا بأعمال الفلك.

2. بالنسبة للكسور، ربما أدى تعدد أنواع الكسور إلى توسيع الرموز الحسابية لتشمل ميادين أخرى غير الأرقام. لا يمكن إعطاء التسلسل الزمني لتمديد هذا الترميز لكنها موجودة عند الحصّار في **كتاب البيان والتذكار**. الترميز يتضمن إدخال خط يفصل بين البسط والمقام للكسر البسيط المفرد، كما يوجد ترميز لثلاثة كسور أخرى. نجد هذه الترميز (مع اختلافات) عند معاصره ابن الياسمين في **كتاب تلقيح الأفكار** وفي الرياضيات في القرنين السابع والثامن / الثالث عشر والرابع عشرالميلاديين[16].

3. بالنسبة للجذور، لا يمكن إيجاد تحديد زمني أيضا لبداية ترميز الجذور، لكنه موجود في كتاب **بغية الطلّاب في شرح منية الحساب** لبن غازي (ت.919 هـ/1513م) في الغرب الإسلامي وهو أحد شراح **كتاب التلخيص** لابن البنا المراكشي، حيث يأخذ حرف حـ فوق العدد المراد جذره مثلا $\sqrt{16}$ على الشكل $\overset{2}{حـ}\,16$، $2\sqrt{4}$ على الشكل $\overset{2}{حـ}\,4$، وكذلك $\frac{2\sqrt{4}}{3\sqrt{9}}$ على الشكل $\overset{3}{حـ}\,9\quad\overset{2}{حـ}\,4$ ، وما يمكن ملاحظته أن رمز الجذر الحالي هو كاستطالة للحرف حـ الذي هو رمز للجذر في التقليد الرياضي العربي[17].

النوع الثاني هو الذي تكون أدواته مجهولة سميت في الجبر الشيء والمال والكعب....الخ ولها مراتبها وتجرى العمليات على هذه الأدوات وعلى أجزائها وعلى مراتبها، الأدوات الجبرية سميت أيضا الجنس والنوع وهي ما يعرف حاليا بوحيدات الحد. العديد من كتب الحساب أدرجت الجبر كفرع في حل المسائل، سمي الشيء أيضا جذر وضلع وقد شكلت الترجمة اللاتينية لمصطلحات الجبر في فترة ترجمات الكتب العربية إشكاليات ارتبطت بمعنى المفاهيم الجديدة للجبر الوليد.

معنى هذه المفاهيم التجريدية والتسميات والمصطلحات والمراتب للأدوات الجبرية يحدّدها مؤلف مجهول لكتاب مجهول العنوان في الحساب في تعريفه لاستخراج جذر عدد حيث يقول:

"أي عدد كان المضروب في نفسه يسمى جذرا في المحاسبات أي عند أصحاب مفتوحات الحساب، والجذر في اللغة هو الأصل، ولما كان العدد المضروب في نفسه أصلا لجميع الأعداد الحاصلة في تلك المنازل يسمى جذرا. أو يسمى ضلعا في المساحة أي عند أصحابها فإنهم يسمون الخطوط المحيطة بالسطوح ذوات الأضلاع، والسطح المربع الذي زواياه قوائم وأضلاعه متساوية هو الحاصل من ضرب ضلع من أضلاعه في نفسه، فهذا السطح بمنزلة المجذور في العدد والضلع بمنزلة الجذر، وبهذا الإعتبار يطلق الضلع على الجذر كما أن المربع يطلق على المجذور. ويسمى شيئا في الجبر والمقابلة أي عند أصحابهما فإن الشيء من مصطلحات أرباب الجبر والمقابلة، اذ الأعداد الواقعة في المنازل كلها مجهولات فسمي المجهول الأول الذي في منزلة الجذر بالشيء الذي هو أمر عام. لكن الضلع أعم من الجذر والشيء، اذ الجذر إذا ضرب في المجذور يسمى الحاصل مكعبا، ويسمى ذلك العدد المجذور بالنسبة إلى المكعب ضلعا، وكذا بالنسبة إلى مال المال وسائر المراتب، لا يقال له جذر وشيء إلا بالنسبة إلى المال فقط، ويسمى الحاصل من الضرب مجذورا عند أصحاب المفتوحات، ومربعا عند أصحاب المساحة ومالا عند أصحاب الجبر والمقابلة."[18]

ترميز العبارات الجبرية كان لتسهيل قراءتها، لا يعلم من كان أول استعمالا لترميز هذه العبارات ولا يُعرف الأسباب التي دفعت علماء الرياضيات في الأندلس(الذين لا يزالون مجهولين) إلى إدخال الرموز الجبرية الأولى في الفصول المخصّصة لهذه المادة. يمكن القول إن أولى المظاهر المعروفة لهذا "الابتكار" تعود إلى القرن السادس الهجري / الثاني عشر الميلادي وربما ظهرت في إشبيلية قبل أن تنتشر في الغرب الإسلامي كافة (شمال إفريقيا حاليا). توجد طريقتان للتعبير عن هذه الأشياء: طريقة الشرق الإسلامي بتقنية الجداول (كل قوة مرتبطة بعمود)، وطريقة الغرب الإسلامي التي تجاور معاملات كل وحيد حد يعلوها الحرف المعبر عن القوة المرافقة[19]. العنصر الأساسي لهذا الترميز هو استخدام الأحرف ش، م، ك وهي الحروف الأولى لشيء ومال وكعب للإشارة إلى x و x^2 و x^3 ومزيج من الحرف الثاني والثالث للتعبير عن جميع القوى الأكبر من 3، تربط بينها حروف "و" للزائد و"إلّا" للاستثناء، وفي حالة

كانت العبارة الجبرية تحوي معادلات فمعنى المساواة هو يعدل يرمز لها بـ "ل"، تمتد هذه الخاصية إلى كتابة كثيرات الحدود من أي درجة، مثال ذلك "عشرة إلّا شيئين تعدل خمسة أشياء إلّا ثلاثة من العدد وصورته 15 إلّا 2ش ل 5ش إلّا 3"[20].

3. العمليات الحسابية

العمليات الحسابية تشمل الجمع والطرح والضرب والقسمة والنسبة وحساب الجذر على الصّحاح والكسور والجذور والمجهول. كل كتب الحساب استخدمت القواعد الرياضية ذاتها من جمع وطرح وضرب وقسمة للمنازل والمراتب والعقود، ولكن طرق إجراء الخوازميات الحسابية هي ما فصلت حساب اليد عن الحساب الهندي.

بالنسبة لعمليتي الجمع والطرح على الصّحاح لا تُذكر في الكتب المصنفة حساب يد ومفتوح وهوائي، أمّا في كتب الحساب الهندي فإن هاتين العمليتين هو مايُستهل به فصل العمليات على الصّحاح ولها رسوم مختلفة وتتأسس على جمع المراتب. بالنسبة لجمع وطرح الكسور فهي مذكورة بشكل مفصل قي جل كتب الحساب.

تُذكر عمليات الضرب والقسمة والنسبة في جل كتب الحساب على الصّحاح والكسور، بالنسبة لتعريف عمليتي الضرب والقسمة فمصدرها على الأغلب كتاب **الأصول** لأوقليدس، خوارزمية عمليتي الضرب والقسمة تتأسس على ضرب وقسمة المراتب المنفردة والمركبة في جل كتب الحساب الهندي وغيرها. توجد في كتب الحساب الهندي عدة أنواع للقسمة وللضرب بشكل خاص، لها رسوم مختلفة على حسب هذه الأنواع، وفي كتب الحساب المصنفة حساب يد ومفتوح وهوائي تُستخدم الطرق الإختصارية والحساب الذهني.

شغلت العمليات على الكسور حيزا مهما من كتب الحساب لاستخداماتها الكثيرة في الفرائض والمعاملات، حيت استخدمت الكسور التسع المنطقة والكسور الصمّاءغير المنطقة والمركبة، ارتبط جزء الكسور بعمليتي القسمة والنسبة، ورغم أنهما عمليتين لهما نفس المفهوم والخواص وكان الحسابيون العرب على دراية بذلك، لكن عُرّفت القسمة بقسمة الكثير على القليل والنسبة أو التسمية بقسمة القليل على الكثير، هذه الأخيرة نتجت عنها مفاهيم وفصول

رياضية أخرى منها التماثل والتشارك والتوافق والتداخل والتباين وهي المتعلقة بالقاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر، كما أنها فتحت باباً جديداً في الحساب العربي وهو عمليات تحليل الأعداد وكيفية تسمية هذه الكسور واختصار ألفاظها.

فيما يخص العمليات على الجذور، بدأت خوارزمية حساب الجذور على الصّحاح والكسور على ما يبدو مع دخول الحساب الهندي، بالإضافة إلى الخوارزمية الهندية في حساب الجذور التامة وتقريب الجذور الصمّاء، استخدم في التقليد الرياضي العربي عملية التحليل إلى جداء عوامل لحساب جذور الأعداد التامة ويبدو أن بدايتها كانت في الغرب الإسلامي وهو ما نجده في كتاب **فقه الحساب** لابن منعم العبدري (ت. 626 هـ/ 1228 م) حيث يذكر طريقة حساب الجذور من أي رتبة كانت بطريقة تحليل العدد إلى جداء عوامله الأولية[21]، ثم نجده لاحقا في كتاب **المقالات** لابن البنا، حيث حسب $\sqrt{4096}$ باستخدام التحليل[22]. نجد طريقة التحليل لحساب الجذور التربيعية والتكعيبية في كتاب يعيش بن ابراهيم الأموي (ع. 774 هـ/1353 م) **مراسم الإنتساب في معالم الحساب**[23] وعند شهاب الدين ابن الهائم (ت.815 هـ) في كتابه **المعونة**[24]، في الكتابين الأخيرين استخدم تحليل الأعداد لحساب الجذور لغرضين الأول استخراج الجذر في حالة كانت الأسس زوجية في تحليل الأعداد وذلك بتنصيف هذه الأسس، الغرض الثاني تمييز بين الجذور الناطقة والجذور الصمَّاء في حالة كانت الأسس فردية في تحليل العدد، وفي هذه الحالة يستخدم طرق التقريب، على ما يبدو يمكن استنتاج أن طريقة التحليل لحساب الجذور بدأت في منطقة الغرب الإسلامي ثم انتقلت بشكل محتشم إلى مناطق الشرق الإسلامي فهي لا تُذكر في كتب الحساب بشكل عام حتى بعد القرن الثامن الهجري/ الرابع عشر الميلادي وعند شرّاح ابن البنا. أمّا فيما يخص العمليات على الجذور فهناك من كتب الحساب ما تذكره وهناك ما لا تذكره أصلا.

لاختبار صحة الأعمال الحسابية استخدمت طريقتان : الأولى دخلت مع كتب الحساب الهندي وتسمّى الميزان وفي بعض الكتب الإمتحان أو الإختبار وهو عبارة عن إجراء حسابي للتأكد من صحة العمليات، نجده لاحقا بكتب الحساب المفتوح والهوائي. مصدر موازين

الأعمال هندي حسب قول الشهرزوري (عاش في القرن 5 أو 6 الهجري/11 أو 12 الميلادي)[25] في شرحه لكتاب **الكافي في الحساب** للكرجي. أغلب كتب الحساب استخدمت ميزان التسعات لأنه الأبسط ويتعلق فقط بجمع عقود المراتب وطرحها بالتسعات، أما موازين الأعداد الأخرى فتدخل فيها خواص أخرى تتعلق بخواص باقي القسمة لكل عدد، كان الحسابيون العرب على دراية بأن هذه الموازين لا تؤكد صحة العمليات وإنما تثبت فقط خطأ العمليات في حالة عدم صحة الحساب، لهذا هناك من الكتب الحسابية من استخدمها بتحفظ أو استغنى عنها واستخدمت الطريقة الثانية وذلك بامتحان العمليات بأضدادها الجمع بالطرح والعكس، الضرب تمتحن بالقسمة والعكس، والجذر يختبر بالتربيع والعكس..وهكذا، هذا ما يجمله كتاب **بغية الطلاب من علم الحساب** لتقي الدين مُحَمَّد بن معروف العثماني المعروف بالراصد (993هـ/1585م) حيث يقول : "..في امتحان صحة الأعمال، أما الموازين التي ذكرها بعض الحسّاب فلا اعتماد عليها لجواز وقع الغلط بقدر الميزان ولكن تمتحن الأعمال بأضدادها، فالتضعيف يمتحن بالتنصيف وبالعكس، فإن طابق الاصل فصحيح وإلّا فلا والإعادة إفادة والجمع يمتحن بالتفريق وهو طرح أحد المجموعين والنظر في الباقي أو طرح أحد المجموعات ثم طرح الآخر من الباقي والنظر في باقي الباقي..والتفريق يمتحن بالجمع...والضرب يمتحن بالقسمة...والقسمة تمتحن بضرب خارج القسمة في المقسوم عليه.."[26]

الإضافة التي قدّمها الرياضيون في التقليد الرياضي العربي بالنسبة لميزان الأعمال أنّهم وسّعوا العمل بميزان الأعمال ممّا أنتج فرع جديد في الحساب والمتعلق بخواص بواقي القسمة على الأعداد، وهو ما نجده مفصَّلاً خاصة عند مؤلفي الغرب الإسلامي وبشكل خاص عند ابن البنا المراكشي وشارحي كتابه **تلخيص أعمال الحساب**.

بالنسبة للعمليات على المجاهيل في حالة الكتب التي أدمجت فرع الجبر في كتب الحساب، كان هناك امتداد لعمليات الحساب على المعلومات إلى المجهولات، فالعمليات التي كانت تجرى على الأعداد المنفردة والمركبة وعلى أجزائها أضحت تُجرى على وحيدات الحد وكثيرات الحدود وأجزائها وسُمي ذلك بحساب الجبر والمقابلة.

4. الخوارزميات الحسابية

في كتب الحساب في التقليد الرياضي العربي نجد الكثير من المسائل التي تعتبر جبرية ولكن وبما أنّ الوسائل المستخدمة لحلها هي وسائل حسابية على شكل خوارزميات أُدرجت في كتب الحساب، هذه الوسائل هي طرائق متنوعة ومتعلقة بميادين أخرى في الرياضيات وتختلف حسب الحضارات التي أوفدت منها. فقبل ابتكار الجبر وفي غياب وسائل تسهّل التعامل مع الكسور أو حلول لمسائل متشابهة، وُجدت الخوارزميات لحل مسائل ذلك الوقت.

الخوارزميات هي قواعد لعمليات حسابية تُجرى على المعلومات لإخراج المجهولات وتستخدم في حل المسائل، ويسمى المجهول حسب الخوازمية المستخدمة فإذا استخدم الجبر نجد تسمية الشيء والمال وإذا استخدمت النسبة نجد تسمية المقدار أو اسم المقدار المراد حسابه مثل المثمن والثمن والمسعر والسعر..الخ.

تأخذ المسائل حيزا كبيرا في مجمل كتب الحساب خاصة كتب الحساب التي تستخدم الذهن، هذه الخوازميات مذكورة دون برهان ويمكن استنتاجها من خلال المسائل الكثيرة المطروحة في كتب الحساب، منها ما هو محلي ومنها ما مصادره معلومة وأحيانا أخرى مجهولة المصدر.

الخوارزميات الموجودة في كتب الحساب بشكل عام هي :

- **مخارج الكسور** : أساس هذه الخوازمية هو تحليل المقام إلى مركباته واستخدام خاصية المقام المشترك، تستخدم هذه الخوازمية لحل معادلات الدرجة الأولى التي تكون معاملاتها كسورا، يُستخدم عادة في حل مسائل الفرائض أو مسائل مشابهة لها، نجده مستخدما بكثرة في كتب حساب الغرب الإسلامي.
- **النسبة** : من الطرق العملية كثيرا في حل مسائل المعاملات، تُستخدم كثيرا في حالة تساوي نسبة مقدارين متجانسين مع نسبة مقدارين آخرين متجانسين أيضا، إذا كانت المقادير أربعة فيستخدم الرابع المتناسب، وتستخدم النسب المؤلفة إذا كانت هناك ثلاثة أجناس. عُرفت النسبة في التقليد الرياضي اليوناني وكذلك في التقليد الرياضي التطبيقي الهندي.

لكن مصدرها في الحساب العربي الكتاب السادس والسابع من كتاب **الأصول** لأوقليدس، يقول أبو الوفا البوزجاني في كتابه **المنازل السبعة** : "ينبغي أن يعلم أن جميع أنواع المعاملات هي مبنية على مسألة واحدة، أوردها أوقليدس في المقالة السادسة من كتابه في **الأصول** على جهة المقادير وفي المقالة السابعة على جهة العدد، وهي قوله كل أربعة أعداد أو مقادير متناسبة فإن ضرب الأول في الرابع مساو لضرب الثاني في الثالث"[27].

طريقة استخراج الرابع المتناسب ذكره وشرحه الخوارزمي في كتابه **كتاب الجبر والمقابلة**[28]، أفرد البيروني (ت. 440هـ/ 1048 م) كتابا لطريقة إيجاد الأعداد المتناسبة وفيه النسب المؤلفة إسمه **مقالة في راشيكات الهند**، في هذا الكتاب قال أن النسبة هي فيما بين المقادير المتجانسة، وأنّه وحسب أوقليدس أقل ما تكون النسبة في ثلاث، وإذا تمايزت كان أقل عدتها هو أربعة، ويذكر أن عليها مدار حسابات التداول في الدواوين والمعاملات والجارية في أمر النجوم والمساحات وقد بين أوقليدس في السادس عشر من السادسة أن السطح الأول منها في الرابع مساو للسطح الثاني في الثالث، ويذكر أنواع النسبة الموجودة في كتاب **الأصول**، ويقول أن الهنود يسمونها ثدك راشيك أي ذو الثلاثة مواضع والراشيك هو الموضع من الصورة، وأن الهنود قسّموا البيوت الأثني عشر راشيك وإنما سموا هذه الثلاثة لأن المعلومات في المعطى منه ثلاثة، وهم قوم يسلكون في حساباتهم الطريق العددي دون الإشتغال بالتعليل الهندسي. يقدم البيوني في كتابه طرق استخراج الرابع المتناسب وكذا استخراج النسب المؤلفة وهي التي تتركب من نسبتين أو أكثر[29]، لإثبات الطريقة يستخدم كتاب أوقليدس ويحيلنا إلى ثابت بن قرة (ت.288هـ/901م) وابن البغدادي[30] وسعيد السجزي(ت. 444هـ/1052م) وأبو العباس النيريزي(ت. 310هـ/922م) وأبو جعفر الخازن (ق.4هـ/10م) للتفصيل في البرهان، أعطى في كتابه رسم طريقة الهنود في استخراج النسبة، كما أعطى عدة مسائل تطبيقية توضح طريقة استخدام الهنود لاستخراج المجهول في النسبة عن طريق جداول[31].

- **طريقة الخطأين**

استخدمت طريقة الخطأ الواحد لحل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد منذ أكثر من ثلاث آلاف سنة، وعرفها المصريون القدماء إبتداءا من الألفية الثانية ولم تختفي إلّا في القرن السابع عشر[32]، وهي ترتكز على إعطاء قيمة ما للمجهول وهي القيمة الخاطئة وانطلاقا منها وبحسابات معينة نصل إلى القيمة الصحيحة، هذه الطريقة تستوجب أن تكون المسائل من الدرجة الأولى لأنه ضمن مراحل الحل توجد بها قواعد النسبة البسيطة.

الطريقة الأخرى لحل المعادلات من الدرجة الأولى أو حل جمل معادلات خطية، هي طريقة الخطأين والمعروفة في مناطق الغرب الإسلامي ومصر بحساب الكفات، والكفات هو عبارة عن ميزان يوضع على كفتيه المفروضان والخطآن، أساس حساب الخطأين هو أيضا التناسب والطريقة تتركز على إعطاء قيمتين كيفيتين للمجهول تكون غالبا خاطئة وإنطلاقا من هاتين القيمتين نجد القيمة الصحيحة، وتكون هناك ثلاث حالات ممكنة : الخطأين يكونان أكبر من الحل الصحيح، القيميتين تكونان أقل من الحل أو يكون الحل بين الخطأين.

أصل طريقة الخطأين صيني وهي موجودة في الكتاب الصيني **الفصول التسعة في الحساب**[33]، وقد خصّص لهذه الطريقة الفصل السابع مرفقة بخمس عمليات وثمانية مسائل خاصة تشكل الهيكل الأساسي للفصل السابع، وبعدها تأتي 12 مسألة عادية حلت بواسطة هذه الطريقة.[34]

توجد طريقة الخطأين لحل جملة معادلتين خطيتين في المصادر اليونانية، وفي بيزنطة عندNicolaos Artabdos نيكولاوس أرتابدوس، في الهند عند Bhāskara II (ق12,) بهاسكارا، وعند الخوارزمي والكرجي.[35]

طريقة الخطأين من دون شك كانت معروفة في فترة الخوارزمي في النصف الأول من القرن التاسع وهذا ما يدل عليه مقتطفات من مخطوط ترجم من العربية إلى اللاتينية لكاتب مجهول بعنوان *Liber augmenti et dilminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit*، وهو يعني بالعربية **كتاب الزيادة**

والنقصان المسمى بحساب التخمين حسب حكماء الهند وما جمعه وألّفه أبراهام وسماه الهندي، هذا الكاتب مجهول، بعض المؤرخين خمن أنه أبو كامل (ق.3هـ/9م)[36]، وآخرين نسب المخطوط إلى اليهودي الأندلسي أبراهام ابن عزرا (ت. 1167م)، من تسمية هذا الكتاب تعطي انطباعا بأن طريقة الخطأين جاءت من الهند. ولكن الطريقة مصدرها الكتاب الصيني **الفصول التسعة في الحساب** وصلت الطريقة إلى العرب بواسطة الهنود عن طريق الحرير، رغم أن المصادر الهندية القديمة وقبل القرن الثاني عشر تغيب فيها هذه الطريقة[37].

لم تكن تُدرج هذه الطريقة ومسائلها في كتب الحساب العربي، وإنما أُفردت لها كتب خاصة بها نذكر منهم أبو كامل(ق.3هـ/9م) له **كتاب الخطأين**، أبو يوسف يعقوب بن مُحَمَّد المصيصي **كتاب الخطأين**، أبو يوسف يعقوب بن مُحَمَّد الرازي **كتاب الخطأين**.[38] كما أفرد قسطا بن لوقا البعلبكي (ق.3هـ/9م) كتابا لطريقة الخطأين وأسماه **مقالة قسطا بن لوقا في البرهان على عمل حساب الخطأين**، لاحظ قسطا بن لوقا أولا أن هذه الطريقة صالحة في كل المسائل التي لا تحتوي على جذر أي على المعادلات الخطية، بعدها أعطى إثباتين لهذه الطريقة الأولى حسابية بحتة، والإثبات الثاني جبري هندسي.[39]

أُدرجت طريقة الخطأين في كتب الحساب في الغرب الإسلامي في وقت أبكر من مثيلاتها في الشرق الإسلامي، نجدها في كتاب **التلقيح** لابن الياسمين (ت. 601 هـ/5-1204 م)، في الشرق الإسلامي إبتداءا من النصف الثاني من القرن السابع الهجري/ الثالث عشر الميلادي.

بقيت الطريقة مستخدمة في التقليد الرياضي العربي إلى عصور متأخرة وتطورت معها المسائل وعددها ومجاهيلها وشروطها وهو ما يمكن رؤيته في مؤلف **الاسعاف الأتم بحساب القلم** لعثمان بن الملك الدمشقي (ق. 10-11 هـ/16-17م) حيث ينسب لقسطا بن لوقا أول إثبات هندسي لطريقة الخطأين بواسطة المثلثات، ويدرس خمسة مسائل مرتبة بحسب الصعوبة وعدد المجاهيل والشروط منها مسائل في الطيور ويتدرج معها الميزان والكفات المرفقة بهذا الميزان في المسألة الخامسة حيث يقسم الكفات إلى أربعة أقسام.[40]

● **طريقة المعكوس** : هي خوارزمية لحل معادلة من الدرجة الأولى، كيفية عمل الخوارزمية يذكرها بهاء الدين العاملي (953 -1030 هـ/1547-1621م) في كتابه **خلاصة الحساب** إذ يقول : "الباب الخامس في استخراج المجهولات بالعكس، قد يسمى بالتحليلي والتعاكس، وهو العمل بعكس ما أعطاه السائل، فإن ضعّف فنصّف، أو زاد فانقص، أو ضرب فاقسم، أو جذّر فربّع أو عكس فاعكس مبتدئا من آخر السؤال"[41]. نستنتج أن أساس طريقة المعكوس بالمفهوم الرياضي الحالي هو تركيب للدوال العكسية حيث الدوال هي عبارة عن دوال خطية أو تآلفية أو مربعة.

استخدم الطريقة الكرجي في كتابه **البديع** في مسألة واحدة دون ذكر اسم الطريقة إذ يقول "مال أضعفته ونقّصت منه عشرة، ثم زدت على الباقي نصفه ونقّصت منه تسعة، ثمّ زدت على الباقي ثلثه ونقّصت منه ثمانية، فلم يبق شيء، فقد وجب أن يكون العدد قبل ذلك ستة، ولكنها بقية عدد نقص منه تسعة فالعدد خمسة عشر. ولكن الخمسة عشر هي عدد قد زيد عليه نصفه، فالعدد عشرة. وهي بقية عدد قد نقص منه عشرة ، فالعدد عشرون. وهي ضعف عدد فالعدد عشرة وهي المطلوب." [42]

على ما يبدو فإن الطريقة في البداية لم تكن معطاة بقواعد ولكنّها منقولة بشكل بديهي دون تفصيل في منهجية الحل وأنه على المتعلم والمتلقي أن يرتاض كثيرا لتعلم الطريقة، ثم استخرجت قواعدها مع القرون اللاحقة.

نجد هذه الطريقة في كتاب **عمدة الحسّاب** لعز الدين الزنجاني ويسمّيها المعكوس، في حين أن الشهرزوري في تعليقه على كتاب **الكافي** للكرجي حلّ هذا النوع من المعادلات جبريا وأيضا بطريقة يسمّيها طريقة المنكوس ويقول :" هي الحل الحسابي المعروف بالبدء من آخر خطوات المسألة والسير خلفا حتى نصل إلى أصل المال"[43].

يذكر الدكتور أحمد سعيدان في تعليقاته أثناء تحقيقه لكتابي أبو الوفا والكرجي :" أنّ سبب عدم وجود الطريقة في كتابي أبي الوفا **المنازل السبعة** والكرجي في كتابه **الكافي** ورودها في كتب حساب التخت وربّما أنّها وردت إلى العالم الإسلامي مع الحساب الهندي"[44].

- **الجبر والمقابلة** : نجد الطريقة مدرجة وبكثرة في كتب الحساب في الغرب الإسلامي، كما نجدها مدرجة أيضا في كتاب **الكافي** للكرجي، لاستخراج المجهول استخدمت المعادلات الست للخوارزمي التي مصدرها كتاب **كتاب الجبر والمقابلة** لمحمد بن موسى الخوارزمي، وإن كانت من درجة أكبر من 2 فمن كتب الجبر المطّور من طرف لاحقي الخوارزمي أبرزهم الكرجي وأبو كامل.
- **خوارزميات أخرى مجهولة المصدر**: كشفت المصادر عن وجود عدد معين من الخوارزميات الأخرى التي لا يزال مصدرها غير معروف وصمّمت ثم استخدمت من طرف الحسَّاب قبل ظهور علم الجبر كمادة. البعض منها استخدم استخدامًا محدودًا في الزمان والمكان وهو حال طريقة "باب"، التي تسمح بحل نوع من مسائل الهبات باستخدام إنشاء هندسي، في حين أن البعض الآخر لاقى انتشاراً واسعاً ممّا جعله يفقد خصوصية الأصلية، هذا هو حال طريقة "المعكوس". إلى هذه الفئة من العمليات الحسابية يضاف نوع معين يمكن اعتباره ما قبل الجبر، وهو يتألف من سلسلة من العمليات الحسابية، مشابهة لتلك التي تشكل الخوارزمية الجبرية لحل المعادلة التربيعية، ولكن يتم الكشف عنها وفقًا للنهج الذي اتبعه كاتب اللوح المسماري Plimpton 13901. في ضوء المصادر الرياضية الشرقية يبدو أن هذا الإجراء لم يصمد أمام تطور علم الجبر وأنه تم التخلي عنه تمامًا من قبل ممارسي الشرق الإسلامي، لم يكن هذا هو حال الأندلس، لأنه عثر على هذه الطريقة لأول مرة في كتيب القرن العاشر هو **رسالة التكسير** لابن عبدون (ت. بعد 366 هـ/976 م)، وهو موجود أيضًا في الكتابات اللاحقة التي أُنتجت في نفس المنطقة.[45]

5. نظرية الأعداد

في التقليد الرياضي العربي احتلت نظرية الأعداد مكانة هامة، وهي من الموروث اليوناني وقد طوّرت منذ الترجمات اليونانية للرياضيات، منها ما أُفرد لها مصنفات خاصة منفصلة عن علم الحساب، ومنها ما أُدمج في كتب الحساب خاصة تلك المتعلقة بخواص العدد والمرتبطة خاصة بكتاب نيقوماخس الجيراسيني (ق.2م) **المدخل إلى علم العدد**.

اهتم بهذا المجال خاصة الفلاسفة، فمثلا في كتاب **رسائل إخوان الصفا وخلان الوفا** يجعلون أول كل العلوم بصفة عامة هو العدد وخواصه[46]، وقد أفرد ابن سينا لهذا المجال كتاب خاص هو كتابه **الشفاء** في الفن الثاني، ويعتبر فيه أن علم الحساب والذي يسمّيه الصناعة هو العدد وخواصه في حين يرى بقية مواضيع الحساب أنها فروع[47].

من الرياضيين الذين أفردوا مؤلفات للعدد وخواصه نجد **كتاب تفسير الأرثماطيقي** للأنطاكي (ت.376 هـ/986م)، كما نرى ابن فلوس قد أفرد **كتاب الأسرار في أسرار الأعداد** لنظرية الأعداد وفي خواص الأعداد وفصله عن كتابه في علم الحساب **إرشاد الحسّاب في المفتوح من علم الحساب**، وأيضا أبو الوفا كتب مقالات في **المدخل إلى الأرثماطيقي** وله **تفسير كتاب ذيوفنطس في الجبر** ولم يدمج هذه الفصول في كتابه الحسابي **المنازل السبعة**، ولأبي جعفر الخازن **كتاب المسائل العددية** .

ظهر تياران من البحث في خواص العدد إنطلقا من نقطتين مختلفتين لدراسة العدد وخواصه، أحدهما استقى مصدره وأيضا حسابه من الكتب الحسابية لكتاب **الأصول** لأوقليدس، أمّا الآخر فيتموضع في حساب الفيثاغوريين المحدثين ومصدرهم **المدخل إلى علم العدد** لنيقوماخس الجيراسيني، ففي كتب أوقليدس نظرية عن الأعداد الزوجية والخواص الضربية للأعداد الصحيحة، قابلية القسمة، الأعداد الأولية....

يظهر الإختلاف بين هذين التيارين في نظرتهما للعدد الصحيح وخواصه، فالعدد الصحيح يتمثل عند أوقليدس بقطعة من خط مستقيم وهو تمثيل ضروري لبرهان القضايا، ورغم مشاطرة الفيثاغوريين المحدثين لنفس المفهوم عن الأعداد الصحيحة وتمسكهم على الأخص بدراسة الخواص عينها، ولكن بطرقهم وأهدافهم تميزوا عن أوقليدس، فقد لجأ أوقليدس إلى البراهين في حين الفيثاغوريين استخدموا الإستقراء لاستخراج الخواص.

وكانت نظرتهما للحساب مختلفة، فعند أوقليدس لم يكن هناك أي هدف خارج هذا العلم في حين نيقوماخس كانت له أهداف فلسفية وحتى نفسية وقد أدرك علماء الرياضيات العرب ذلك الفارق وهذا ما نجده عند ابن الهيثم (965هـ/1040م)، وبنظرهم لم يكن هناك فارق

بين كائنات علم الحساب وإنّما كان هناك فارق في طريقة الإثبات، ورغم تفضيلهم للطريقة الأوقليدية، لكنهم لجؤوا أيضا إلى طريقة الإستقراء، ولقد بدأت نظرية الأعداد بالمعنى الأوقليدي والفيثاغوري باكرا قبل نهاية القرن التاسع للميلاد، وعاصرت هذه النظرية ترجمة ثابت ابن قرة لكتاب نيقوماخس ومراجعة لترجمة كتاب **الأصول** لأوقليدس.[48]

معادلة المقادير العددية المنطقة والإرتباط فيما بينها هو ميدان آخر في مجال نظرية الأعداد وهو ما يعرف بالمعادلات الديوفنطسية، فقد ارتبطت بتيار ثالث مدروس في الرياضيات العربية وكانت لهم فيها أعمال كثيرة مطورة، وكان مصدرها ترجمة كتاب ديوفنطس(ق.3م) المسمّى **المسائل العددية**.

ولهذا يمكن تمييز ثلاث توجهات فيما يخص علم العدد النظري، وهذا حسب الشروحات لكتب يونانية ترجمها الرياضيون العرب، سنهتم بصفة خاصة بالمواضيع التي ذكرت في كتب الحساب دون التفصيل في المواضيع التي ارتبطت بالميادين الأخرى.

1. الأول هو توجه الفيثاغوريين المحدثين

هذا التوجه الفيثاغوري ناتج من الترجمة العربية لكتاب **المدخل إلى علم العدد** لنيقوماخس، ظهرت أهمية الأعداد الشكلية في التقليد الرياضي العربي من خلال إدماج حسابها في كتبهم الحسابية، فقد انتشرت قواعد حسابها وامتدت في اتجاهين، الأول جبري بحساب مختلف السلاسل العددية، والآخر باستخدام التحليل التوافقي، كما كانت هناك إثباتات لمختلف صيغ حسابات هذه الأعداد وللسلاسل العددية. يمكن القول أن الرياضيين العرب قد أضافوا عدة نتائج حسابية للقواعد الحسابية لنقوماخس على عدة أصعدة لإحتياجاتهم التطبيقية لها، على سبيل المثال في الألعاب الحسابية وكذا المربعات السحرية، والمثلث العددي، فنجد في ميدان الحساب الأوقليديسي، البغدادي، الأموي. ومن الجبريين أبو كامل، البوزجاني، الكرجي، السموأل. ومن الفلاسفة نجد الكندي، ابن سينا، الجوزجاني... [49]ومن الهندسيين ثابت ابن قرة وابن الهيثم... فقد استخدموها لحساب مساحات وأحجام مجسمات القطوع.

من محاور البحث أيضا في تيار الفيثاغوريين، نجد تمييز الأعداد: متحابة كانت أو متعادلة[50]، أم تامة فمع دراسة الأعداد المتحابة بدأ البحث في محاولة إيجاد عبارة للأعداد التامة، فعن طريق الخازن في القرن العاشر ميلادي يعلمنا ببداية التساؤلات عن وجود أعداد تامة فردية، وفي نهاية نفس القرن وفي بداية القرن اللاحق تحصل البغدادي على بعض النتائج الخاصة بهذه الأعداد حيث أعطى النتيجة التالية : إذا كان مجموع القواسم الفعلية للعدد n (قواسم n ماعدا المساوية لـ $2^n - 1$ عدد أولي فإن $1 + 2 + \cdots + (2^n - 1)$ هو عدد تام، وهي نظرية منسوبة إلى J. Broscius جوان بروسيوس في القرن 17 م.[51]

وقد حاول ابن الهيثم المعاصر للبغدادي تحديد هذا النوع من الأعداد وذلك بإثبات أن عكس المبرهنة IX.36 من كتاب **الأصول** لأوقليدس صحيح، وهي النظرية التي أثبتها فيما بعد أولر(ت.1783م)[52].

وضع ثابت بن قرة نظرية للأعداد المتحابة وبرهن عليها باستخدام أسلوب أوقليدس، وابتداءا من ابن قرة وحتى نهاية القرن السابع عشر اقتصر تاريخ النظرية الحسابية للأعداد المتحابة على ذكر المبرهنة ونقلها مثل الأنطاكي (ت. 987 م)، البغدادي، الكرجي والأموي والتي نجدها فيما بعد عند ديكارت (ت. 1650 م) وعند فيرما (ت. 1638 م). أمّا حساب الثنائيات فقد بدأ مع مساعدة الجبر، حيث كانت أول محاولة لإثبات مبرهنة ثابت بن قرة جبريا من طرف كمال الدين الفارسي، ولقد بوشر بحساب الثنائيات في مختلف المناطق الإسلامية وعلى مدى أزمنة مختلفة.[53]

في الغرب الإسلامي والأندلس يوجد آثار لمساهمات ثابت بن قرة عند المؤتمن بن هود ملك سرقسطة (1081-1085 م) في كتابه **الإستكمال**، عند الحصّار (ق. 12 م) في حسابه الضمني للثنائية المتحابة (220، 284) و(17296، 18416)، وعند القاضي شريف (ت. 1283 م) وهو تلميذ لابن منعم، وعند ابن البنا (ت.1321 م) في كتابه **تلخيص أعمال الحساب**[54].

ارتبط حساب هذه الأعداد بمفهوم الأعداد الأولية، نجد اهتمام الرياضيين في التقليد الرياضي العربي بالأعداد الأولية، وهذا ما كان قيد البحث عند إبن الهيثم خلال حلّه للمسألة التي تسمى **مسألة البواقي الصينية**[55] خلال هذه الدراسة أعطى معياراً لتحديد الأعداد الأولية، وهو المعروف اليوم تحت اسم "مبرهنة ويلسون"[56]، ونجد دراسة هذا النظام من التطابقات ولكن ليس بشكل كبير عند خلفاء ابن الهيثم كالخِلاطي[57]بالعربية وفيبوناتشي باللاتينية.[58]

في استمرارية للبحث في أعداد جديدة لكن ليس من بين المسائل الرياضية التي درسها اليونان، ووجدت في التقليد الرياضي العربي وكانت أكثر انتقالا من الشرق إلى الغرب الإسلامي وحتى إلى أوروبا نجد ما يسمى "بالأعداد المضمرة"، والتي لا تنضوي تحتها الأعداد فقط وإنّما أيضا الكلمات والأسماء والأعوام وحتى البروج، يعتبر الكندي من الأوائل اللذين كتبوا في هذا الميدان، كما نجد أن رياضيين آخرين وفي فترات متفرقة قد تطرقوا إلى موضوع الأعداد المضمرة مثل الأنطاكي (ق. 10 م)، ابن طاهر البغدادي (ق. 11 م) ، وفي الغرب الإسلامي نجد ابن الياسمين (ت. 1204 م) في كتابه **التلقيح**[59] وأيضا الزنجاني الذي أفرد له فصلا في كتابه **عمدة الحسّاب**.

صنفت الأعداد المضمرة في التقليد الرياضي العربي ضمن نظرية الأعداد ووضعت ضمن ميدان الأرتماطيقي، وهو ما نجده في كتاب **كتاب أعداد الأسرار في أسرار الأعداد** لابن فلوس وهو كتاب خاص بأنواع الأعداد وخواصها ضمن تيار نيقوماخس، يذكر في آخر كتيبه 25 أصلا وهي عبارة عن قضايا يقول أن أغلبها (يخص الأصول الخمس الأخيرة) بأنها تستخدم لإخراج الأعداد المضمرة.[60]

2. التوجه الثاني هو تمديد لدراسة كتاب الأصول لأوقليدس

ساعد كتاب **الأصول** في تعريف العمليات الحسابية والبرهان على خواصها، والعمليات على النسب بين المقادير، خاصة مع تعميم مفهوم الكسور كأعداد وليس باعتبارها كنسبة

مقادير هندسية متصلة، هذه المفاهيم كان أساسها مفهوم الوحدة وتجزيئها وهو ما نجده مثلا في كتاب ابن البنا **رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب**.

الحاسب استطاع حساب الجذور من خلال كتب الحساب الهندي واستخدموها كأعداد وفي حالة كانت صمّاء فقد استخدموا التقريب، فالمعاملات المستخدمة في المسائل في مجملها أعداد ناطقة، أمّا العمليات على الجذور فقد كانت مرتبطة بالأعداد القابلة للقياس وغير القابلة للقياس الموجودة في كتاب **الأصول**.

أما بالنسبة للنسب فقد أستخدموا مفهوم النسبة الخاص بأربعة أعداد متناسبة الموجودة في الكتاب السادس من **الأصول** والسابع واستخدموها كأعداد دون الدخول في تفاصيل النسب المتصلة والمنفصلة للمقادير.

3. **التوجه الثالث هو ديوفونطسي**، وهو ما يعرف بالتحليل الديوفنطسي(نسبة لإلى ديوفنطس (ق. 3 م)[61]) والذي بدوره له مسارين :

- المسار الأول جبري وهو تحليل ديوفنطسي مُنطق، وله مصدرين :

1. الأول مصدره مجهول وقد بدأت دراسته في أواسط القرن التاسع للميلاد، أي بعد الخوارزمي وقبل أبو كامل، فلم يورد في كتاب الخوارزمي كفصل قائم بذاته فلقد ذكره في كتابه ولكن لا شيء يدل على اهتمامه بهذا التحليل ولم يكن قد تُرجم بعد كتاب **المسائل العددية** لديوفنطس من قبل قسطا بن لوقا الذي سمّاه **صناعة الجبر لديوفنطس**[62].

يتجلى هذا التيار في مختلف المسائل التي يؤول حلّها إلى جمل معادلات منها معادلات كانت أساسا لأبواب جديدة في علم العدد، عولج هذا النوع من المسائل عند أبو كامل، في كتابه **كتاب الطرائف في الحساب**، قام أبو كامل بدراسة جمل معادلات خطية غير محدودة تتدرج فيها عدد المجاهيل مع تعقيد المسائل، مقسمة إلى ثلاث أنواع منها جمل بما يعرف بمسألة الطيور التي أصلها هندي وصيني، ولكن لم يحلّها بطرقهم وإنما حلها بطريقة مختلفة، ومنها جمل معادلتين بخمسة مجاهيل، لاحظ أبو كامل أن حلول المسائل إذا تعلقت بالأعداد الطبيعية

فأحيانا ما تكون الحلول وحيدة، ولكن أيضا يوجد من لها عدة حلول وتسمى مسائل أو من لا يوجد لها أي حل في مجموعة الأعداد الناطقة.[63]

في كتاب أبو كامل الآخر **كتاب الجبر والمقابلة**، قام بحل 39 مسألة ديوفنطسية من الدرجة الثانية وأربعة جمل معادلات خطية ومجموعة من المتتاليات، وذكر أن هذه المسائل كانت متداولة عند حسّاب ذلك الوقت ولكنه حلّها بطرق تختلف عنهم.

حُلّت المسائل بالإعتماد على استخدام الوسيط وتعويضه وهو ما نجده معتمدا عليه في كتاب **المسائل العددية** لديوفنطس، ثم بعد التعويض حلّ بعض المسائل جبريا واستخدم مفهوم المقابلة بين العبارات الجبرية الموجود في كتب الجبر، كما استخدم المتطابقة الشهيرة $(a \mp b)^2 = a^2 + b^2 \mp 2ab$ لحل ولإثبات حلول مسائل ديوفنطسية من الدرجة الثانية.

ظهرت بعضا من هذه المعادلات لاحقا عند الكرجي وبنفس القيم مضافا إليها معادلات تشبهها في كتابيه الأول جبري عنوانه **الفخري** والثاني حسابي عنوانه **البديع** مع ملاحظة أن هذه المعادلات لا تظهر في كتاب **المسائل العددية** لديوفنطس، أعطى أبو كامل تفريق واضح بين المسائل المحدّدة والمسائل غير المحدّدة، هذه الأخيرة أطلق عليها لفظ "السيّالة"[64] وهي المسائل التي تخرج بجوابات كثيرة حتى يفرق بينها وبين المعادلات الجبرية، ما يلاحظ في المسائل الديوفنطسية في كتاب أبو كامل أنها لا تتعدى معادلات الدرجة الثانية عكس الكرجي الذي يذكر معادلات ديوفنطسية من درجة أكبر نتيجة لتأثير الترجمة العربية لكتاب ديوفنطس **المسائل العددية**.

2. المصدر الثاني هو ترجمة كتاب **المسائل العددية لديوفنطس**، هذا التيار مثّله الكرجي الذي نقل التحليل غير المحدّد نقلة أخرى، أسلوب الكرجي يختلف عن أسلافه وعن أبو كامل وحتى عن أسلوب ديوفنطس، استخدم فيه مبدأ الإستقراء الذي عرّفه في **الفخري** وفي **البديع** وألّف فيه كتابا **كتاب في الاستقراء**، يرمز الإستقراء هنا إلى التحليل الديوفنطسي الذي يقول عنه عليه مدار أكثر الحسابات ولا غنى عنه في كل باب[65].

في كتابه الجبري **الفخري** أدرج الكرجي مسائل من كتاب ديوفنطس ومن مسائل كانت قبله في البيئة الرياضية العربية، وعرض المسائل على شكل مجموعات متدرجة في الصعوبة سمّاها الطبقات، من بينها مسائل عالجها أبو كامل في كتابه **كتاب الجبر والمقابلة** وبنفس الأرقام حيث استعمل كل منهما خاصية الشكل النموذجي لكثير حدود الدرجة الثانية وما يعرف في عصرنا الحالي بالمميّز، ولكن الكرجي لم يفصّل فيها ولم يذكر تبريرها عكس أبو كامل[66]، من بين طرق معالجة المسائل استخدم الكرجي إضافةً إلى الإستقراء طرق جبرية، كما استعمل الوسيط والتعويض وطريقة المساواة المثناة[67]، هذه الطريقة الأخيرة ذُكرت في كتاب **صناعة الجبر لديوفنطس**[68].

عالج الكرجي في كتابه الحسابي **البديع** مسائل ديوفنطسية بنفس الوسائل التي استخدمها في كتابه **الفخري**، من بين المسائل يوجد الكثير منها مشابها وبتفصيل أكبر وطرق تبرير أكثر من التي ذكرها أبو كامل في كتابه الجبري، كما أن من بين المسائل مسائل غير مذكورة في كتابه **الفخري**، بالإضافة إلى الطرق الجبرية والوسيط والتعويض لحل المسائل استخدم الكرجي طريقة المساواة المثناة، لكن في هذه المرة بتبيان شروط وحالات استخدامها مع تبريرها وهو ما لا نجده مثلا في كتاب **صناعة الجبر لديوفنطس**[69].

- المسار الثاني يتركز على كتاب **المسائل العددية** لديوفنطس في توجهه الأصلي وهو التحليل الديوفنطسي الصحيح، فقد درست إنطلاقا من القرن العاشر مسائل ديوفنطسية تدمج بين محاولة إيجاد حلول صحيحة للمعادلات الديوفنطسية من جهة وإعطاء براهين لها على شاكلة براهين أوقليدس من جهة أخرى. من بين هذه الدراسات دراسة الثلاثيات الفيثاغورية، فنجد من أوائل من درسوها الخازن(ق.10م) وأوجد برهانا لها يختلف عن برهان أوقليدس[70].

يبحث الخازن عن ما يسمى بأصل الجنس للدلالة على المثلث المولد للثلاثيات الفيثاغورية أو المثلث الأولي، كما درس هذا النوع من المسائل كاتب مجهول يؤكد أنه الأول في هذا المجال، وهو ما يوضح بما لا يدع مجالا للشك أنّ الأبحاث في هذا المجال جديدة كليا غير معروفة قبلهم ولا في زمنهم، كما أن هناك تمييز بين التحليل الديوفنطسي غير المحدّد وهذا الباب إذ يرجع

الخازن بعض المسائل التي ليس لها حلول طبيعية إلى الجبر، بالإضافة إلى دراسة الخازن لمسألة كتابة عدد صحيح على شكل مجموع مربعين، فهو يبحث أيضا عن حلول صحيحة لجمل معادلات ديوفنطس يكون مجموع أربعة أعداد مختلفة مربع بحيث مجموع كل اثنين منها مربع.[71]

علماء الرياضيات في التقليد الرياضي العربي كانو أول من طرحوا السؤال حول المسائل المستحيلة مثل الحالة الأولى من مبرهنة فيرما، ومعروف عن هذه المبرهنة أنّ الخُجندي(ق.10 هـ)[72] قد حاول إثبات أنّه "لا يمكن أن يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب"، وحسب الخازن فإن برهانه ناقص، وبدوره فقد حاول الخازن إثبات ما يلي "لا يمكن أن يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب، كما قد يمكن أن يجتمع من عددين مربعين عدد مربع، ولا أن ينقسم عدد مكعب إلى عددين مكعبين، كما قد ينقسم عدد مربع إلى عددين مربعين"، وكذلك كان برهان أبو جعفر الخازن ناقصا. تواصل البحث وتدريجيا مع تطور هذا النوع من المعادلات اعتمد الرياضيون أكثر على البراهين الحسابية، وظهرت إرادة لاستبدال لغة الهندسة بأساليب حسابية بحتة[73].

فيما يخص الكتب الحسابية والتي أدرجت مسائل عددية، نجد كتاب البغدادي **التكملة** وكتاب **عمدة الحسَّاب** لعز الدين الزنجاني وكتاب **الفوائد البهائية في القواعد الحسابية** لابن الخوام البغدادي (642-725 هـ/1245-1325م).

يهدف كتاب **المسائل العددية** لديوفنطس في الأساس إلى حل المعادلات في مجموعة الأعداد الصحيحة، وفي نفس التوجه ولكن عن طريق موروث آخر عولجت مسألة البواقي الصينية في التقليد الرياضي العربي لايجاد الأعداد المضمرة، التي لم تعد رهينة للرياضيات الترفيهية وإنّما تعدتها إلى حلول نظرية في ميدان نظرية الأعداد معطاة من قبل ابن الهيثم، أول معالجة لحلول مسائل البواقي كانت في جداول عملياتها مكافئة للعمليات الحسابية، ويبدو أن الأنطاكي هو الوحيد الذي قام بالحساب بالجداول، فهي على ما يبدو لم تنتشر بعده. العمليات الحسابية لحل مسائل البواقي عولجت أولا عند البغدادي، وبنفس الطريقة نجدها عند

الزنجاني، ثم عند ابن الهائم والعاملي، في الغرب الإسلامي عند ابن الياسمين في كتابه **التلقيح**[74].

4. علم الحساب في الغرب الإسلامي

ذكرنا سابقا محتوى كتب الحساب في التقليد الرياضي العربي، لكن هناك بعض الإختلافات في طريقة معالجة المسائل ومضامين كتب الحساب في الغرب الإسلامي لا تبدو مطابقة لنظيراتها في الشرق الإسلامي، سنلقي الضوء على الحساب في الغرب الإسلامي حتى يمكننا التمييز بينه وبين كتب الحساب في الشرق الإسلامي.

ظهرت أولى النشاطات الرياضية باللغة العربية في منطقة الغرب الإسلامي في القيروان في المغرب الأدنى. ثم طاهرت (تيارت حاليا في الجزائر)، كان الإنتاج في هذه المنطقة بقدر ما يجب أن تفي باحتياجات محددة وهي حساب المعاملات وتوزيع الميراث. أول كتيب معروف تم نشره في هذه المنطقة هو كتاب أبو سهل القيرواني(ق.9 م) **كتاب في الحساب الهندي**. وكما يشير العنوان بوضوح فهناك استئناف للنظام العشري الموضعي الهندي يصاحبه الخوارزميات الحسابية، أي هو مادة كتاب الخوارزمي (ت. 850 م) والذي يحمل نفس العنوان ونشر في بغداد قبل 833 م.[75]

أمّا في فترة خلفاء المغرب (900 م–1008 م) تتوافق هذه الفترة في المنطقة المغاربية مع المرحلة الفاطمية، التي كانت فيها الأيديولوجيا والسياسة في قطيعة كاملة وتنافس مع القوى الإسلامية في الأندلس، لكنه مكّن على الصعيد العلمي من إحراز تقدم كبير في كلا المنطقتين. بالنسبة للمرحلة المغاربية من الخلافة الفاطمية (909 م–969 م) قدم الببليوغرافيون بعض أسماء الشخصيات الذين مارسوا علم الفلك، علم الحساب أو الهندسة، مثل العوتاقي (ت.955 م) وابن كليس (ت. 990 م) والهواري (ت. 1023 م)، دون ذكر محتوى إنتاجهم في هذه المجالات مختلفة.[76]

في الأندلس يبدو أن أولى كتابات الحساب اهتمت بميدانين أحدهما الفلك والفرع الثاني الفرائض، ذكر صاعد الأندلسي أبو عبيدة مسلم بن أحمد البلنسي (ت.295هـ/908 م)

الملقب بصاحب القبلة كان قد سافر إلى الشرق، واهتم بالحساب والنجوم، ومُحَمَّد ابن اسماعيل (ت. 331 هـ/ 943 م)[77] الذي ذكر عنه أنه كان عالما بالحساب والمنطق.

ثم ذكر صاعد طبقة أخرى لاحقة من العلماء اشتغلوا بعلم الحساب في شقه الخاص بالمعاملات بالإضافة إلى الفرائض والفلك، منهم أبو غالب حباب بن عبادة الفرائضي (ق.10م) [78] كان مشهورا بعلم العدد وذكر أن له مؤلفا في الفرائض، أحمد بن مُحَمَّد بن أحمد الأنصاري[79] كان مقدما في العدد يقر له المجريطي بالسبق في العلوم الرياضية، كما ذكر عبد الله بن مُحَمَّد المعروف بالسري (ق.10 م) كان عالما بالعدد، وأبو القاسم أحمد بن مُحَمَّد المعروف بالطنبري كان معلما بعلم العدد وله كتاب في المعاملات، وأبو القاسم مسلمة بن أحمد المجريطي (ت.398 هـ/ 1008 م) له كتاب **في تمام علم العدد** وهو في المعنى المعروف في عصر صاعد بالمعاملات ويعتبر المجريطي إمام الرياضيين بالأندلس[80]، وهو من مهد لظهور الفلسفة عن طريق علم الهندسة ومن تلاميذه الكرماني الذي رحل إلى المشرق وجلب معه رسائل إخوان الصفا[81]، ممّا يؤسف له أن الجزء الأعظم من كتب المجريطي مفقودة وقليل منها لم يعرف إلّا بالإسم، وقد حصل لبس في إسم أبو القاسم مسلمة المجريطي وكذا نسبة بعض مؤلفاته إلى أبي مسلمة مُحَمَّد بن ابراهيم بن عبد الدائم المجريطي (ق. 5 هـ/ 11 م). فأبو القاسم مسلمة المجريطي فلكي رياضي، في حين أن أبو مسلمة المجريطي كيميائي[82].

في نفس هذه الفترة عاش مُحَمَّد بن عبدون الجبلي العددي (ت. بعد 366هـ/976 م) أدّب بالحساب والهندسة قبل أن يطبب، سافر إلى مصر والبصرة ولم يدخل بغداد[83]، له كتيب بعنوان **رسالة في التكسير** الذي يعتبر أقدم عمل محفوظ في الرياضيات في الأندلس.[84] هذا العمل لا يعلم الفترة التي كتبها فيها، استخدم فيها سلسلة من العمليات الحسابية، مشابهة لتلك التي تشكل الخوارزمية الجبرية لحل المعادلة التربيعية وفقًا للنهج الذي اتبعه كاتب اللوح المسماري Plimpton 13901 وهو نوع معين يمكن اعتباره ما قبل الجبر في التقليد الرياضي العربي، وهذه الطريقة موجودة أيضًا في الكتابات اللاحقة التي أُنتجت في نفس المنطقة.[85]

في هذه الطبقة الثانية ذكر صاعد أنها جاءت بعد أن انتشرت كتب كان الأمير الحكم المستنصر بالله[86] قد استجلبها من ديار المشرق فيها من العلوم القديمة والحديثة، وكان جزء منها أحرق وبعد الفتنة أُخرجت وانتشرت بين الناس[87]، وبعد هذه الفتنة تشكلت فترة الإمارات في الأندلس ولعل في هذه الفترة تم تداول كتاب نيقوماخس الجيراسيني **المدخل إلى علم العدد** بالنسخة المترجمة من قبل حبيب بن بحريز (ق. 9 م)، وعلى ما يبدو أنه كان من بين الكتب التي انتشرت في هذه الطبقة من العلماء، فإذا تفحصنا الكتب التي ذكرت في هذه الطبقة الثانية وعناوين المؤلفات وقارنّاها مع اهتمامات علماء الطبقة الأولى نجد تكرار لمصطلح العدد وليس الحساب، وربما أدخلت خواص الأعداد في كتب الحساب وهي كتب معاملات حسب الوصف الذي ذكره صاعد عن كتاب المجريطي **في تمام العدد**.

الطبقة الثالثة التي ذكرها صاعد واهتمت بالحساب هم تلاميذ المجريطي، منهم القاسم أَصبَغ بن مُحَمَّد بن السمح (ت. 426هـ/ 1035 م) وله **كتاب ثمار العدد** في المعاملات و**كتاب طبيعة العدد**، وأبو مسلم عمرو بن أحمد بن خلدون (ت. 458 هـ/1057 م)، وأبو الحسن علي بن سليمان الزهراوي (ت.1009م) له كتاب في المعاملات[88] هو **كتاب مبادئ المعاملات بطريق البرهان**.

قد تم ذكر الرياضيين الثلاثة من قبل ابن خلدون، وذكر أنهم كتبوا كتبا في المعاملات، يذكر ابن خلدون أن المعاملات فرع من فروع الحساب وأنّه تصريف الحساب في معاملات والغرض من تكثير المسائل المفروضة فيها حصول المران والدربة بتكرار العمل حتى ترسخ الملكة في صناعة الحساب[89]، وابن خلدون يجعل المعاملات فرع من علوم العدد مختلفا عن صناعة الحساب.

ذكر ابن خلدون أنّ صناعة الحساب هي صناعة حادثة احتيج إليها للحساب في المعاملات، وفي هذه الصناعة الحادثة يذكر الحصّار وابن البنا والأحدب، رغم أن الحصّار أورد مسائل في المعاملات لكنه لم يذكره من ضمن من كتبوا في المعاملات، ويذكر في هذه الصناعة الحادثة العمليات الأربع والجذر وحسابه، ومصطلح حادثة بمعنى طارئة، وربما قصد بالصناعة

الحادثة الحساب الهندي الذي كان طارئا على التقليد الرياضي العربي، فعلى ما يبدو أن كتب المعاملات التي ألف فيها ابن سمح والزهراوي ليست في الحساب الهندي وإنما في الحساب الذهني وحساب اليد وهذا ما يدل عليه وصف ابن خلدون في تعريفه للمعاملات، وهي مثل كتب المعاملات في الشرق الإسلامي التي تستخدم الحساب الذهني بالدرجة الأولى.

لم يذكر ابن خلدون (732 -808 هـ/ 1332-1406م) أي رياضي من رياضيي الأندلس أنهم أفردوا كتبا في خواص العدد (لم يذكر ابن سيد وابن طاهر)، واختص في هذا الجانب ابن سينا بالذكر وهو من الشرق الإسلامي، فقد قال في الأرثماطيقي "وهذا الفن أول اجزاء التعاليم وأثبتها، ويدخل في براهين الحساب، وللحكماء المتقدمين والمتأخرين تآليف، وأكثرهم يدرجونه في التعاليم، ولا يفردونه بالتآليف، فعل ذلك ابن سينا في كتابه **الشفاء**"، نلاحظ أن عنوان كتاب الزهراوي في المعاملات عنوانه **كتاب مبادئ المعاملات بطريق البرهان**، وعلى ما يبدو أنه استخدم خواص العدد في كتابه للبرهان على المعاملات.

ينسب ابن الأكفاني (ت.749 هـ) في كتابه **إرشاد الطالب إلى أسنى المقاصد** كتاب **الكامل** لأبي القاسم بن السمح في نوع الحساب المفتوح الذي يعرفه أنه يستخدم الصور الخيالية للأرقام أي الذهنية، ويذكر أن منفعة الحساب المفتوح ضبط المعلومات وحفظ الأموال وقضاء الديون وقسمة التركات أي أن كتاب **الكامل** هو كتاب في المعاملات من النوع الخاص بالحساب الهوائي وهي كتب في المعاملات تختص بالحساب الذهني.

كتب المعاملات في الغرب الإسلامي على الأرجح هي كتب خاصة بحساب اليد أُدرج فيها خواص العدد للبرهان على العمليات والتعاريف، وعلى الأغلب احتوت على جمع بعض المتتايات الحسابية ومربعاتها ومكعباتها التي يمكن حسابها ذهنيا، وهذا الجزء الأخير من الحساب هو ما بقي وتجذر كتقليد في كتب الحساب في الغرب الإسلامي لاحقا، وعلى الأرجح أنه حتى القرن الحادي عشر لم يكن بعد قد انتشر استخدام الحساب الهندي في منطقة الأندلس.

بالنسبة للحساب الهندي، من الكتب التي ألفت في الغرب الإسلامي في هذا الحساب، **البيان والتذكار في صنعة عمل الغبار**[90] لأبي بكر الحصَّار(كان حيا حوالي 557 هـ/1161

م)، **تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار**[91] لابن الياسمين (ت. 601 هـ/5-1204 م)، فرغم أنهما كانا معاصرين لبعضهما فكتابيهما مختلفين في المنهجية والتبويب.

الحصّار يبوب كتابه حسب ترتيب كتب الحساب الهندي، فيبدأ بتعريف المراتب وأسماء العدد، ثم العمليات الجمع، الطرح، الضرب، التسمية، القسمة، ثم التجذير، ويذكر بعد كل عملية ميزانها لامتحان صحة الأعمال، ثم يفرد جزءا كبيرا من الكتاب إلى أعمال الكسور، جزء الكسور يستخدمه لتطبيق خوارزميات الحساب في الباب الذي يليه وهي المسائل، وذلك باستعمال خواص تحليل مخارج الكسور والمقامات المشتركة، يستخدم في حل المسائل أيضا الجبر وحساب الكفات، بعد المسائل يذكر جمع الأعداد الطبيعية ومجموع بعض المتتاليات الحسابية ومربعاتها ومكعباتها وما شاكل هذه الجموع.

بالنسبة لابن الياسمين (ت. 601 هـ/5-1204 م) فيبدأ بالضرب ثم القسمة مع اعطاء طرق اختصارية في الضرب وطريقتين اختصاريتين في القسمة، ثم التسمية، ثم الجمع الذي يدخل فيه جمع الأعداد الطبيعية ومربعاتها ومكعباتها ثم عملية الطرح، ثم عمليات على الكسور، أما موازين الأعمال فيضعها في فصل منفصل، ثم ذكر المسائل وأعطى حلها بالكفات وبالجبر وأغلبها حلت بطريقة يستخدم فيها توحيد مقامات الكسور أي مخارج الكسور. ثم الباب الخامس للجبر التي ذكر فيه المسائل الست للخوارزمي، وفي الفصل الثاني من هذا الباب ذكر التجذير والعمليات عليه، وأفرد فصلا في باب الجبر للمساحة، ثم ذكر باب لم يذكر فيه ترقيمه وسماه "باب ما يدخل في اللبن والآجر في أبنية معلومة"، وفي هذا الباب يذكر مسائل تعتبر مسائل من التقليد الصيني ومسائل في الأعداد المضمرة، ثم يذكر عدة مسائل في الزكاة وفي المعاملات وفي الفرائض وفي نوادر المسائل.

فكتاب ابن الياسمين لا يبدو منهجيا، فباعتباره في الحساب الهندي، فهو لا يبدأ بالجمع والطرح وإنما أخرهما بعد الضرب والقسمة، لا يُدخل الجذر في آخر العمليات الأربع بل يدخله في فصل آخر هو الجبر، ويحل مسائل في الجبر قبل أن يفرد للجبر بابا خاصا لوحده يُدخل فيه حساب المساحة، ويذكر مسائل غير متناسقة المواضيع.

ويمكن أن نفسر عدم التناسق هذا أن الكتاب في الأصل لم يكن بهذا الترتيب في ذهن ابن الياسمين وإنما أضيفت الأبواب والفصول الأخرى لاحقا، الأبواب من 1 إلى 4 متناسقة ويبدو أن هذا الجزء هو أصل الكتاب وهو كتاب في المعاملات مبوب حسب ترتيب كتب المعاملات في حساب اليد وعلى الأرجح أنه كان سائدا في زمن ابن الياسمين، وهو يعطينا فكرة عن ترتيب كتب المعاملات في الغرب الإسلامي، فهو يبدأ بالضرب ثم القسمة مع ذكر الطرق الإختصارية ثم خواص الأعداد المتعلقة خصوصا بجمع المتتاليات ثم باب حلول المسائل، هذا هو أساس وترتيب الكتاب، ثم بنى عليه الحساب الهندي وذلك بإجراء العمليات الخاصة بالحساب الهندي على الفصول المتعلقة بالعمليات، فأعطى طرق الضرب والقسمة بالحساب الهندي وذكر معهما الطرق الإختصارية، ثم أضاف عملية الجمع بالحساب الهندي على الأعداد المفردة وأدخلها في باب جمع المتتاليات وأضاف الفصل الخاص بعملية الطرح التي تكون عادة مرافقة لعملية الجمع، ولهذا لا نرى الجذر والخواص عليها بعد العمليات الأربع الأخرى، ونرى مسائل حلت بالجبر قبل أن يدرس حساب الجبر والمقابلة في الباب الخامس، وهو ما يؤكد أن التقسيم كان في البداية وفق نهج كتب حساب اليد. بعدها أضاف كتاب خاص بحساب الجبر والمقابلة وحساب المساحة وأدخل فيه العمليات على الجذور، ولاحقا أضاف الباب الذي سماه "باب ما يدخل في اللبن والأحر في أبنية معلومة" بدون إعطاء رقم له وأدرج فيها مسائل مختلفة المواضيع.

أوجه الإختلاف بين كتابي الحصّار وابن الياسمين هو في ترتيب الأبواب، ونجد ابن الياسمين يضع مجموع المتتاليات في باب الجمع في حين الحصّار يضعها في فصل منفرد، أما في التشابه هو إفراد فصول كثيرة لأعمال الكسور، وإدراج جمع بعض المتتاليات الحسابية في مؤلفيهما المنضويين تحت مسمى حساب هندي.

نلاحظ أن المسائل المعالجة في كتابي الحصَّار وابن الياسمين هي مسائل تستخدم بالدرجة الأولى مقامات الكسور، ثم الجبر والكفات بدرجة أقل. طريقة مخارج الكسور ليست محلية وهي التي تُستخدم في مسائل الفرائض، نجدها عند اسحاق بن يوسف الصردفي (ت.500 هـ)[92]

في كتابه **كتاب مختصر الهندي** حيث أفرد لها فصلا تحت اسم "مسائل في مخارج العدد" وذكرناها في هذه المقالة في فصل الخوارزميات الحسابية[93].

ما يجمع كتاب ابن الياسمين والحصّار ويميزهما عن كتب الحساب في الشرق الإسلامي في ذلك الوقت هو:

– أولا إدخال الترميز في الكسور من خلال خط الكسر.

– ثانيا عدم احتوائهما على مسائل تحل بالرابع المتناسب الذي كان أساس كتب المعاملات في الشرق الإسلامي حيث تعتمده كثيرا مسائل المعاملات والتلاقي والإقرارات والأجرة، ويتميز باحتواء مسائله أربعة مقادير بحيث نسبة مقدارين متجانسين يساوي نسبة مقدارين آخرين متجانسين وبوحدة مغايرة، لا تستخدم طريقة النسبة، ربما لأن هذه الطريقة كانت حصرا فقط على كتب المعاملات التي هي كتب حساب ذهني ولم تدرج في كتب الحساب الهندي.

– ثالثا إدراج حساب الجبر وطريقة الكفات في كتب الحساب، وهو ما لانراه في كتب حساب الشرق العربي سواء المندرجة تحت الحساب الهندي أو الأنواع الأخرى من الحساب (كحالة خاصة نجدها في كتاب **الكافي** للكرجي في الشرق الإسلامي)، أُدمجت هذه الأنواع من الحساب في كتب الشرق الإسلامي حتى النصف الثاني من القرن السابع هجري/ الثالث عشر ميلادي، فلقد كان كل نوع من الحساب يخصص له تآليف خاصة به، حساب الخطأين، حساب الجبر والمقابلة، حساب المساحة.

– رابعا وهو من أهم التميزات وسنجدها في كتاب ابن البنا أيضا، هو إدراج جمع المتتاليات في باب عمليات الجمع، فيكون هناك جمع على الأفراد وجمع على النسب وذلك بعد ذكر أنواع النسب الموجودة.

من الكتب الحسابية التي انتشرت كثيرا في الغرب الإسلامي وكان عليها شروح هي مؤلفات ابن البنا المراكشي (ت. 721هـ/1321 م) في الحساب منها كتابه **رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب**[94] فهو متفرد خصوصا في تبويبه، ففي البداية يعرف العدد: من ناحية التقسيم والكثرة المرتبط بالكمية المنفصلة وعدم التجزيئ المرتبط بالكمية المتصلة، ثم من جهة مراتب

العدد، ثم من ناحية خواص العدد الزوجية والفردية ، فيفصل في مفهوم الواحد والوحدة، ثم يأتي على الأبواب الخاصة بالعمليات، الجمع الذي يكون على الأفراد أو على التوالي بالنسبة سواء بالتفاضل أو بالأس، وهي جمع المتتاليات الحسابة ومربعاتها ومكعباتها، ثم الطرح الذي يكون على الأفراد ويذكر فيه الإشارة، ويذكر فيه نوع ثان من الطرح المرتبط بعملية القسمة وهو الطرح المتتابع للعدد الصغير من العدد الكبير والذي يفنى به فينتج عن ذلك ما نعرفه بالقاسم المشترك الأصغر، وفي هاتين العمليتين لا يذكر فيهما كيفية الحساب في حالة الأعداد المنفردة والتي تكون في الحساب الهندي وإنما يشير إليهما فقط، ثم الضرب ويتفرد فيه أيضا بحساب ضرب الأعداد في البعد الواحد والمسطحة والمكعبة، ويذكر خواص منها خواص التبديل والجمع، ثم يذكر كيفية الضرب في الحساب الهندي من حيث ماهيتها دون أن يرسم هذه العملية، ثم القسمة ويخص الكمية المنفصلة ويذكر أنواعها وخواصها من دون ذكر رسم القسمة الموجود في كتب الحساب الهندي، ولا يذكر قسما للتسمية، ثم الكسور فالجذور، بالنسبة للجزء الثاني فيدرس فيه الخوارزميات التي تحل بها المسائل من دون ذكر للمسائل وكأنه الجزء العملي للجزء الأول، ففي القسم الأول خصّصه للنسب، القسم الثاني للجبر. ولم يذكر في هذا الجزء طريقة الخطأين.

هذا التقسيم المنهجي نجده أيضا في كتابه **تلخيص أعمال الحساب** فهو يقسم الكتاب إلى جزئين نظري وتطبيقي، الجزء الأول يقسمه إلى أعمال الصحيح وأعمال الكسور وأعمال الجذور التي سيطبقها في الجزء الثاني وهو استخراج المجهولات بالمعلومات عن طريق النسبة وعن طريق الجبر والمقابلة وعن طريق الكفات وهي بشكل العام أهم الخوارزميات في حل المسائل.

الجزء الخاص بنظرية الأعداد له أهمية خاصة في الغرب الإسلامي، وعلى ما يبدو بدأت هذه الأهمية بشكل خاص بعد انتشار كتاب **المدخل إلى علم العدد** سواء بشكل مباشر من خلال ترجمة حبيب بن بحريز أو بشكل غير مباشر من خلال **كتاب إخوان الصفا**.

يظهر هذا الإهتمام في إعادة صياغة لكتاب **المدخل إلى علم العدد** لنيقوماخس منسوب إلى ربيع ابن يحي الأسقف (ق.10 م)، ابن البنا (ت. 1321 م) في كتابه **رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب**، وعند ابن منعم (ت. 1228 م) في كتابه **فقه الحساب** حيث وفي كتابه هذا وفي باب سمّاه النوع التاسع في الأشكال العددية الذي أعطى فيه معلومات مهمة على إسهاماته وإسهامات رياضيي الأندلس بين القرنين الحادي عشر والثاني عشر في ميدان الأشكال العددية، ذكر رياضيين كانت لهما أعمال أصيلة هما ابن سيد المهندس (ق. 10 م)، وعبد الحق ابن طاهر الذي عاش ربما في القرن الثاني عشر[95].

تظهر في كتاب **فقه الحساب** لابن منعم (ت. 1228 م) بالإضافة إلى المعلومات التاريخية، أعمال أصيلة في نظرية الأعداد وفي التوفيقات، فيه فصول كلاسيكية عن الحساب الهندي وفصول غيرها أكثر أصالة مثل الأعداد الشكلية، وأخرى عن الأعداد المتحابة، وبخاصة الفصل المكرس بالكامل لمسألة التوفيقات عنوانه "فصل في تعداد الكلمات التي لا يستطيع البشر إلا التعبير بإحداها"، هذا الفصل هو بحث جديد يستند إلى مسألة قديمة طرحها علماء اللغة العربية في القرن الثامن وهم يعدون كل كلمات اللغة لتأليف المعجم. ومن النتائج التي حصل عليها ابن منعم إما بالاستعانة بالبرهان الاستقراء (استقراء بسيط) أو عن طريق تقنية الجداول، إحصاء تباديل حروف الكلمة، مع أو بدون تكرار الحرف، وكل القراءات الممكنة للكلمة بأخذ بعين الإعتبار حروف العلة التي يمكن ربطها بكل صوت.[96]

5. قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

- ابن الأبار : **التكملة لكتاب الصلة**، تحقيق عبد السلام الهراش، دار الفكر، بيروت، ج. 1، 1995.
- أحمد ابن منعم العبدري : **فقه الحساب**، تقديم إدريس لمرابط، دار الأمان، الرباط، 2005.
- أحمد فؤاد الأهواني : **الفلسفة الإسلامية**، مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب، 1985.
- إخوان الصفا : **رسائل إخوان الصفا وخلان الوفا**، مراجعة خير الدين الزركلي، مؤسسة هنداوي، المملكة المتحدة ، 2017، ج.1.

–أبو بكر الحصَّار : **البيان والتذكار في صنعة عمل الغبار**، مخطوط جامعة بينسالفانيا، Bibliotheca Schoenbergensis, LJS. 293.

– أبو بكر الكرجي: **البديع في الحساب**، تحقيق عادل أنبوبا الكرجي، مطبوعات الجامعة اللبنانية، 1964.

– أبو بكر الكرجي : **الفخري**، صورة مخطوط المكتبة الوطنية الفرنسية، رقم arabe 2459.

– أبو بكر الكرجي : **الكافي في الحساب**، صورة مخطوط مكتبة غوته رقم Ms. Orient. A 1474.

– أبو بكر الكرجي: **الكافي في الحساب**، تحقيق مع مقدمة ودراسة بالمقارنة بكتاب **الكافي في الحساب** لأبي بكر الكرجي بقلم سعيدان أحمد سليم، جمعية عمال المطابع التعاونية، عمان، 1971.

–ابن البنا المراكشي : **رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب**، تقديم ودراسة وتحقيق محمد أبلاغ ، منشورات كلية الآداب والعلوم الإنسانية، فاس، 1994.

– ابن البنا المراكشي: **كتاب المقالات لابن البنا**، صورة مخطوط مكتبة برلين، رقم pet.669.

– بهاء الدين العاملي: **خلاصة الحساب**، مخطوط المكتبة البريطانية، قسم المجموعات الشرقية والهندية، رقم ADD.23569/2، من مجموع تحتل صفحاته (103-135).

– ابن جلجل : **طبقات الأطباء والحكماء**، تحقيق فؤاد سيد، مؤسسة الرسالة، مصر، ط. 2، 1985.

– خليفة حاجي : **كشف الظنون**، تعليق مُحَمَّد شرف يلتاقايا ورفعت بلقاح الكليسي، مؤسسة التاريخ العربي، لبنان.

– راشد رشدي : **الرياضيات والعلوم الفيزيائية : التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد**، إشراف رشدي راشد بمعاونة ريجيس مورلون، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، ط. 2، 2005، ج. 2.

– ابن سينا: **الشفاء : الفن الثاني في الرياضيات الحساب**، الهيئة المصرية العامة للكتاب، الإسكندرية، 1975.

– ابن سينا : **رسائل في الحكمة والطبيعيات**، دار العرب، القاهرة، ط. 2.

– صاعد الأندلسي : **كتاب طبقات الأمم**، تحقيق لويس شيخو اليسوعي، مجلة المشرق، بيروت ، 1912.

– شهاب الدين ابن الهائم: **المعونة**، مخطوط مكتبة برلين، رقم pm. 124.

– عبد الرحمن ابن خلدون: **العبر وديوان المبتدأ والخبر العبر وديوان المبتدأ والخبر**، تحقيق عبد الله مُحَمَّد الدرويش، دار البلخي– مكتبة الهداية، دمشق، 2004، ج.2.

– عثمان ابن الملك الدمشقي: **الاسعاف الأتم بحساب القلم**، مخطوطات جامعة الرياض–قسم المخطوطات، رقم 301.

– فؤاد سزكين : **تاريخ التراث العربي**، جامعة الإمام مُحَمَّد بن سعود الإسلامية – جامعة الملك سعود، لايدن، ج 4،1971.

ـــــ ج 5، 1974.

- ابن الفرضي: **تاريخ علماء الأندلس**، تحقيق بشار عوار معروف، دار الغرب الإسلامي، تونس، ج. 1،ج.2.

– قسطا ابن لوقا : **صناعة الجبر لديوفنطس**، تحقيق رشدي راشد، التراث العلمي العربي 1 ، مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب، مصر، 1975.

– مُحَمَّد الفارابي: **إحصاء العلوم** ، مكتبة أنجلو المصرية، القاهرة، ط.3، 1968.

– مُحَمَّد بن أحمد البيروني: **مقالة في راشيكات الهند**، مادة ميكروفيلمية من معهد إحياء المخطوطات العربية 3137، مكتبة خدا بخش بتنه، الهند، رقم 35/2519، ضمن مجموع تحتل صفحاته (239 ظ–244ظ).

– مُحَمَّد بن أحمد الخوارزمي: **مفاتيح العلوم**، دار الكتب العلمية، بيروت.

– مُحَمَّد بن أحمد بن غازي: **بغية الطلّاب في شرح منية الحساب**، مكتبة Hathi Trust Digital Library، المخطوطات الإسلامية لجامعة ميشيغان، رقم، manuscript 1820.

– مُحَمَّد ابن الأكفاني: **إرشاد الطالب إلى أسنى المقاصد**، تحقيق اسعد بك حيدر و مُحَمَّد سليم الآمدي، بيروت، 1322 هـ.

– مُحَمَّد بن معروف تقي الدين: **بغية الطلّاب من علم الحساب**، صورة مخطوط مكتبة الفاتيكان، رقم Sbath 496.

- مُحَمَّد بن موسى الخوارزمي : **كتاب الجبر والمقابلة**، تحقيق رشدي راشد، من كتاب **رياضيات الخوارزمي، تأسيس علم الجبر**، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، ط.1.

–ناهد مُحَمَّد سالم : **نظم تصنيف المعرفة عند المسلمين– دراسة تحليلة**، منشورات دار الثقافة العلمية ، كلية الآداب –جامعة الإسكندرية ، 2000.

– ابن النديم: **كتاب الفهرست**، تحقيق رضا تجدد المازنداني، الحقوق محفوظة للمحقق.

– نصير الدين الطوسي: **أخلاق ناصري**، دار الهادي، بيروت، ط.1، 2008.

– أبو الوفا البوزجاني: **كتاب المنازل السبعة**، تحقيق مع مقدمة ودراسة بالمقارنة بكتاب **الكافي في الحساب** لأبي بكر الكرجي بقلم سعيدان أحمد سليم، جمعية عمال المطابع التعاونية، عمان، 1971.

– ابن الياسمين الفاسي : **تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار**، تحقيق التهامي زمولي، رسالة ماجستير : **الأعمال الرياضية لابن الياسمين**، المدرسة العليا للأساتذة –القبة، أطروحة لنيل شهادة الماجستير في تاريخ الرياضيات، 1993

– يعيش بن ابراهيم الأموي : **مراسم الإنتساب في معالم الحساب**، تحقيق أحمد سليم سعيدان، معهد التراث العلمي العربي، جامعة حلب، 1981.

– صورة مخطوط في الحساب مجهول العنوان والمؤلف من المكتبة الوطنية الفرنسية رقم arabe 2261.

المراجع باللغة الأجنبية

- Adolf P. YOUSCHKEVITCH : *Les mathématiques arabes (8-15siécles)*, la libraire Vrin, Paris.
- Ahmed DJEBBAR : *Du nombre pensé a la pensée du nombre, quelques aspects da la pratique arithmétique arabe et de ses prolongements en Andalus au Maghreb., en actes de « la rencontre internationale de Peiresc sur la pensée numérique »*, (Peiresc, 7-10 septembre 1999), C/ Alvarez, J. Dhombres & J.-C, pont (éds.), sciences et techniques en perspective (2).
- Ahmed DJEBBAR : *Ibn ʿAbdūn al-ʿUdhrī al-Qurtubī*, 2019, E.I.3, p.62.
-Ahmed DJEBBAR: *Frome China To Paris 2000 years Transmission Of Mathématical Ideas : La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans*, sous direction de Dold-Samplonius, Yvonne , W. Dauben M. et, Joseph , Stuttgart : Franz Steiner Verlag , 2002.
-Ahmed DJEBBAR : *Les mathématiques dans l'espace méditerranéen : l'exemple d'al-Andalus et du Maghreb*, History and Pedagogy of Mathematics, Jul 2016, Montpellier, France. Hal-01349234.
-Ahmed DJEBBAR: *Similitudes et différences dans les pratiques mathématiques en pays d'Islam*, Brentjes Livre.
- Jérôme GAVIN et Schärlig : *Fausse position et heuristique au Moyen Empire*, Cnrs- université Paul Valéry (Montpellier III), ENiM 8.
-Les Neuf Chapitres : *Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires, Edition critique bilingue traduite, présentée et annotée par ChEMLA Karine et GUO Shchun*, dunod, Paris, 2004.
- M. BALLIEU et M.-F. *GUISSARD: Les problèmes du premier degré : des méthodes de fausse position à la résolution algébrique*,

Revue de collège Belges, mathématique et pédagogie, n^0 150, janvier-février 2005, CRME, Belges.

- Rashed ROSHDI : *D'Al-Khawārizmī à Descartes*, Etude sur l'histoire des mathématiques classiques, Hermann édition, Paris, 2011.

-Rashed ROSHDI : *Ibn al-Haytham et les nombres parfaits*, HISTORIA MATHEMATICA 16 (1989).

-Rashed ROSHDI : *L'analyse diophantienne au Xe siècle : l'exemple d'al-Khāzin*, Revue d'histoire des sciences , tome 32, n^{0}3, pp. 193-222, 1979

قائمة الهوامش

[1] ناهد، مُحَمَّد سالم: **نظم تصنيف المعرفة عند المسلمين– دراسة تحليلة**، منشورات دار الثقافة العلمية ، كلية الآداب –جامعة الإسكندرية ، 2000، ص.49، 52، 64، 76.

[2] مُحَمَّد الفارابي: **إحصاء العلوم** ، مكتبة أنجلو المصرية، القاهرة، ط.3، 1968، ص.93.

[3] إخوان الصفا : **رسائل إخوان الصفا وخلان الوفا**، مراجعة خير الدين الزركلي، مؤسسة هنداوي، المملكة المتحدة ، 2017، ج.1، ص ص. 63-64

[4] مُحَمَّد بن أحمد الخوارزمي: **مفاتيح العلوم**، دار الكتب العلمية، بيروت، ص ص.4، 107.

[5] ابن النديم: **كتاب الفهرست**، تحقيق رضا تجدد المازندراني، الحقوق محفوظة للمحقق، ص.325.

[6] ابن سينا : **رسائل في الحكمة والطبيعيات**، دار العرب، القاهرة، ط. 2، ص ص. 104- 112.

[7] ابن سينا: **الشفاء : الفن الثاني في الرياضيات الحساب**، الهيئة المصرية العامة للكتاب، الإسكندرية، 1975، ص.69.

[8] نصير الدين الطوسي : **أخلاق ناصري**، دار الهادي، بيروت، ط.1، 2008، ص ص.87-88،

[9] مُحَمَّد ابن الأكفاني: **إرشاد الطالب إلى أسنى المقاصد**، تحقيق اسعد بك حيدر و مُحَمَّد سليم الآمدي، بيروت، 1322 هـ، ص ص. 120-122.

[10] عبد الرحمن ابن خلدون: **مقدمة ابن خلدون**، تحقيق عبد الله مُحَمَّد الدرويش، دار البلخي– مكتبة الهداية، دمشق، 2004، ج.2، ص.253-256.

[11] ناهد مُحَمَّد سالم : **نظم تصنيف المعرفة عند المسلمين– دراسة تحليلية**، مرجع سابق، ص.279.

[12] خليفة حاجي : **كشف الظنون**، تعليق مُحَمَّد شرف يلتاقايا ورفعت بلقاح الكليسي، مؤسسة التاريخ العربي، لبنان، ص. 71.

[13] أبو الوفا البوزجاني : **كتاب المنازل السبعة**، تحقيق مع مقدمة ودراسة بالمقارنة بكتاب **الكافي في الحساب** لأبي بكر الكرجي بقلم سعيدان أحمد سليم، جمعية عمال المطابع التعاونية، عمان، 1971، ص ص. 44-45.

[14] أبو بكر الكرجي : **الكافي في الحساب**، صورة مخطوط مكتبة غوته رقم Ms. Orient. A 1474، ص ص. 15و-15ظ,

[15] Ahmed DJEBBAR: *Similitudes et différences dans les pratiques mathématiques en pays d'Islam*, Brentjes Livre, 2019, pp.4- 5.

[16] Op. cit., pp.7-8.

[17] مُحَمَّد بن أحمد بن غازي: **بغية الطلّاب في شرح منية الحساب**، مكتبة Hathi Trust Digital Library، المخطوطات الإسلامية لجامعة ميشيغان، رقم، manuscript 1820، ص..109.

[18] صورة مخطوط في الحساب مجهول العنوان والمؤلف من المكتبة الوطنية الفرنسية رقم arabe 2261، ص ص. 11و-12ظ.

[19] Ahmed DJEBBAR: *Similitudes et différences dans les pratiques mathématiques en pays d'Islam*, op. cit., p.8.

[20] مُحَمَّد بن أحمد بن غازي: **بغية الطلّاب في شرح منية الحساب**، مرجع سابق، ص.130.

[21] أحمد ابن منعم العبدري : **فقه الحساب**، تقديم إدريس لمرابط، دار الأمان، الرباط، 2005، ص.81.

[22] ابن البنا المراكشي: **كتاب المقالات لابن البنا**، صورة مخطوط مكتبة برلين، رقم pet.669، ص. 27و.

[23] يعيش بن ابراهيم الأموي : **مراسم الإنتساب في معالم الحساب**، تحقيق أحمد سليم سعيدان، معهد التراث العلمي العربي، جامعة حلب، 1981، ص. 53، ص.63.

[24] شهاب الدين ابن هائم: **المعونة**، مخطوط مكتبة برلين، رقم pm. 124، 99 و (ص. 106)، 160 و (ص. 167).

[25] الشهرزوري : هو مُحَمَّد بن علي بن الحسين بن أحمد الشهرزوري (عاش في القرن الخامس أو السادس الهجري)، وهو ثاني شارح لكتاب **الكافي** للكرجي والشرح الأول وضعه الحسين بن أحمد بن علي الشفّاق البغدادي (ت511هـ/1117م).

[26] مُحَمَّد بن معروف تقي الدين: **بغية الطلّاب من علم الحساب**، صورة مخطوط مكتبة الفاتيكان، رقم Sbath 496، ص. 112 ظ.

[27] أبو الوفا البوزجاني : **كتاب المنازل السبعة**، مرجع سابق، ص.280.

[28] **محمد بن موسى الخوارزمي : كتاب الجبر والمقابلة**، تحقيق رشدي راشد، من كتاب **رياضيات الخوارزمي، تأسيس علم الجبر**، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، ط.1، 2010، ص. 217.

[29] في استخراج النسبة المؤلفة نستخدم طريقة الرابع المتناسب مرتين أو أكثر وهذا حسب المسألة وحسب عدة اختلاف المقادير.

[30] ربما يقصد به البغدادي صاحب **التكملة**.

[31] مُحَمَّد بن أحمد البيروني: **مقالة في راشيكات الهند**، مادة ميكروفيلمية من معهد إحياء المخطوطات العربية 3137، مكتبة خدا بخش بتنه، الهند، رقم 35/2519، ضمن مجموع تحتل صفحاته (239 ظ-244ظ)، ص ص. 240ظ - 241 و.

[32] Jérôme GAVIN et Schärlig : *Fausse position et heuristique au Moyen Empire*, Cnrs- université Paul Valéry (Montpellier III), ENiM 8, pp. 113-132, : 2015, p. 113.

[33] **الفصول التسعة في الحساب**: مؤلف صيني تم تجميعه، كتبه عدة أجيال من العلماء أولهم كان عام 202 ق.م وآخرهم في القرن 2 م.

[34] *Les Neuf Chapitres : Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Edition critique bilingue traduite, présentée et annotée par ChEMLA Karine et GUO Shchun, dunod, Paris, 2004, p. 549.

[35] Adolf P. YOUSCHKEVITCH : *Les mathématiques arabes (8-15siécles)*, la libraire Vrin, Paris, 1976, p. 46.

[36] يُنسب للخوارزمي كتاب بهذا العنوان **الزيادة والانقاص** *Liber augmenti et diminutionis*، وهو كتاب **الجمع والتفريق** ذكره البغدادي في كتابه **التكملة**، انظر : رشدي، راشد : **رياضيات الخوارزمي، تأسيس علم الجبر**، مرجع سابق، ص ص.50-51

[37] M. BALLIEU et M.-F. GUISSARD: *Les problèmes du premier degré : des méthodes de fausse position à la résolution algébrique*, Revue de collège Belges, mathématique et pédagogie, n^0 150, janvier-février 2005, CRME, Belges, p. 3.

[38] ابن النديم : **كتاب الفهرست**، مرجع سابق، ص ص.339-340.

[39]Adolf, P. YOUSCHKEVITCH : *Les mathématiques arabes (8-15siécles)*, op. cit., pp. 46-48.

[40] عثمان ابن الملك الدمشقي: **الاسعاف الأتم بحساب القلم**، مخطوطات جامعة الرياض-قسم المخطوطات، رقم 301، ص. 157 و-162و.

[41] بهاء الدين العاملي: **خلاصة الحساب**، مخطوط المكتبة البريطانية، قسم المجموعات الشرقية والهندية، رقم ADD.23569/2، من مجموع تحتل صفحاته (103-135)، ص.118ظ.

[42] أبو بكر الكرجي: **البديع في الحساب**، تحقيق عادل أنبوبا الكرجي، مطبوعات الجامعة اللبنانية، الكرجي، 1964، ص 74.

[43] أبو بكر الكرجي: **الكافي في الحساب**، تحقيق مع مقدمة ودراسة بالمقارنة بكتاب **الكافي في الحساب** لأبي بكر الكرجي بقلم سعيدان أحمد سليم، جمعية عمال المطابع التعاونية، عمان، 1971، ص. 387.

[44] أبو بكر الكرجي: **الكافي في الحساب**، مرجع سابق، ص. 455.

[45] Ahmed Djebbar : *Similitudes et différences dans les pratiques mathématiques en pays d'Islam,* op. cit., pp. 5-6.

[46] إخوان الصفا : **رسائل إخوان الصفا وخلان الوفا**، ج.1، مرجع سابق، ص ص. 63-64.

[47]ابن سينا: **الشفاء : الفن الثاني في الرياضيات الحساب**، مرجع سابق، ص.69.

[48] راشد رشدي : **الرياضيات والعلوم الفيزيائية : التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد**، إشراف رشدي راشد بمعاونة ريجيس مورلون، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، ط. 2، 2005، ج. 2، ص ص. 530-531.

[49]Rashed ROSHDI : *D'Al-Khawārizmī à Descartes, Etude sur l'histoire des mathématiques classiques*, Hermann édition, Paris, 2011, pp. 277-279.

[50] الأعداد التامة : هي الأعداد التي يكون مجموع قواسمها الفعلية (ما عدا نفسها والواحد) مساوية لها.

[51] Rashed ROSHDI : *D'Al-Khawārizmī à Descartes, Etude sur l'histoire des mathématiques classiques*, op. cit., p. 274-275.

[52] Rashed ROSHDI : *Ibn al-Haytham et les nombres parfaits*, HISTORIA MATHEMATICA 16 (1989), pp. 343-352.

[53] راشد رشدي : **الرياضيات والعلوم الفيزيائية : التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد**، مرجع سابق، ص ص. 531-534.

[54] Ahmed DJEBBAR : *Du nombre pensé a la pensée du nombre, quelques aspects da la pratique arithmétique arabe et de ses prolongements en Andalus au Maghreb*., en actes de « la rencontre internationale de Peiresc sur la pensée numérique », (Peiresc, 7-10 septembre 1999), C/ Alvarez, J. Dhombres & J.-C, pont (éds.), sciences et techniques en perspective (2), pp. 303-322, 8 (2004), p. 313.

[55] أراد حل الجملة $\begin{cases} x \equiv 1[i] \\ x \equiv 1[p] \end{cases}$ حيث p عدد أولي و $1 < i \leq p$.

[56] إذا كان $n > 1$ يكون الشرطان التاليان متكافئين : n عدد أولي و $(n-1)! \equiv -1[n]$.

[57] الخلاطي: فخر الدين عبد العزيز بن عبد الجبار الخِلاطي (1197–1282م)، نسبه إلى بلدة خِلاط في تركيا حاليا، في منطقة الأناضول الشرقية.

[58] راشد رشدي : **الرياضيات والعلوم الفيزيائية : التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد**، مرجع سابق، ص ص. 537-538.

[59] Ahmed DJEBBAR: *Frome China To Paris 2000 years Transmission Of Mathématical Ideas : La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans*, sous direction de Dold-Samplonius, Yvonne , W. Dauben M. et, Joseph , Stuttgart : Franz Steiner Verlag , 2002, p 224.

[60] شمس الدين اسماعيل ماردیني (ابن فلوس) : **كتاب أعداد الأسرار في أسرار الأعداد**، مخطوطة مكتبة برلين، رقم 5972 (LBG.199)، من مجموع تحتل الصفحات من 36-71، ص. 29 و.

[61] دبوفنطس : هو عالم يوناني عاش في الإسكندرية وبرع في الرياضيات .ما عرف عن حياته قليل جداً حيث لم يعرف تاريخ ولادته ولا تاريخ وفاته بدقة .ألّف ديوفانتوس 13 كتاباً باللغة اليونانية بعنوان **الأرتماطيقي**، مازال هناك جدل حول عددها وترتيبها، وإن وجدت كلها أم لم يزل بعضها مفقودا.

[62] راشد رشدي : **الرياضيات والعلوم الفيزيائية : التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد**، مرجع سابق، ص ص.515-518.

[63] Adolf P. YOUSCHKEVITCH : *Les mathématiques arabes (8-15siécles)*, op. cit., p. 66.

[64] أبو كامل : **كتاب الجبر والمقابلة**، معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية، فرانكفورت، 1986، ص. 157

[65] راشد رشدي : **الرياضيات والعلوم الفيزيائية : التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد**، مرجع سابق، ص ص.518-519.

[66] مثال ذلك حل المعادلة $x^2-(10x-8)=a^2$ هذه المعادلة رقمها 32 من الطبقة الرابعة عند الكرجي في كتابه **الفخري** وهي نفسها المعادلة 25 عند أبو كامل في كتابه **كتاب الجبر والمقابلة**: أنظر :

أبو بكر الكرجي : **الفخري**، صورة مخطوط المكتبة الوطنية الفرنسية، رقم 2459 arabe، ص. 86 و،

أبو كامل : **كتاب الجبر والمقابلة**، مرجع سابق، ص.181.

[67] قال الكرجي في كتابه **الفخري** : "اعلم أن كل مربعين اذا قسمت فضل ما بينهما على فضل ما بين الجذرين واخذت الخارج من القسمة وزدت عليه فضل ما بين الجذرين وأخذت نصفه كان جذر أعظم المالين وإن نقصت فضل ما بين الجذرين من الذي خرج من القسمة كان نصف الباقي جذر أصغر المالين وهذا يسمى المساواة". أي أن $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}+a-b\right)=a$ و $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}-(a-b)\right)=b$ مع $a>b$. أنظر

أبو بكر الكرجي: **الفخري**، صورة مخطوط المكتبة الوطنية الفرنسية، رقم 2459 arabe، ص. 25ظ.

[68] قسطا ابن لوقا : **صناعة الجبر لديوفنطس**، تحقيق رشدي راشد، التراث العلمي العربي 1 ، مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب، مصر، 1975، ص46.

[69] أبو بكر الكرجي: **البديع في الحساب**،مرجع سابق، ص ص. 75-84.

[70] راشد رشدي : **الرياضيات والعلوم الفيزيائية : التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد**، مرجع سابق، ص. 523.

[71] Rashed ROSHDI : *L'analyse diophantienne au Xe siècle : l'exemple d'al-Khāzin*, Revue d'histoire des sciences , tome 32, n^{0}3, pp. 193-222, 1979, pp 198-199.

[72] حامد بن الخضر الخُجَنْدي من علماء الفلك والرياضيات في منتصف القرن الرابع هجري/ العاشر ميلادي، يُنسب الخجندي إلى مدينة خُجَنْد في آسيا الوسطى، عاش وعمل في مدينة الري بالقرب من مدينة طهران حاليا.

[73] راشد رشدي : **الرياضيات والعلوم الفيزيائية : التحليل التوافقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد**، مرجع سابق، ص ص. 523-527.

[74] Ahmed DJEBBAR ; *Frome China To Paris 2000 years Transmission Of Mathématical Ideas : La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans*, op. cit., p 224.

[75] Ahmed DJEBBAR : *Les mathématiques dans l'espace méditerranéen : l'exemple d'al-Andalus et du Maghreb*, History and Pedagogy of Mathematics, Jul 2016, Montpellier, France. Hal-01349234, p. 2.

[76] Ahmed DJEBBAR : *Les mathématiques dans l'espace méditerranéen : l'exemple d'al-Andalus et du Maghreb*, op. cit., p. 3.

[77] كان عالما بالنحو والحساب وعمر إلى أن بلغ ثمانين سنة كان مؤدبا لأمير المؤمنين الحكم المستنصر بالله، أنظر. ابن الفرضي: **تاريخ علماء الأندلس**، ج.2، تحقيق بشار عوار معروف، دار الغرب الإسلامي، تونس، ص. 72.

[78] كان عالما بالفرائض والحساب مشهورا بذلك وله في الفرائض مؤلفات، منها كتاب **الولاء** وكان يُدرّس به الفرائض. أنظر : ابن الفرضي : **تاريخ علماء الأندلس**، ج.1، مرجع سابق، ص. 162.

[79] من أهل قرطبة رحل إلى مكة ومصر. أنظر : ابن الفرضي : **تاريخ علماء الأندلس**، ج.1، مرجع سابق، ص. 108.

[80] صاعد الأندلسي : **كتاب طبقات الأمم**، تحقيق لويس شيخو اليسوغي، مجلة المشرق، بيروت ، 1912، ص ص. 67-69.

[81] أحمد فؤاد الأهواني : **الفلسفة الإسلامية**، مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب، 1985، ص ص 89-90.

[82] فؤاد سزكين : **تاريخ التراث العربي**، ج 4، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية - جامعة الملك سعود، لايدن، 1971، ص ص. 438، 440.

فؤاد سزكين : **تاريخ التراث العربي**، ج 5، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية - جامعة الملك سعود، لايدن، 1974، ص. 426.

[83] ابن الأبار : **التكملة لكتاب الصلة**، ج. 1، تحقيق عبد السلام الهراش، دار الفكر، بيروت، 1995، ص. 298.

ابن جلجل : **طبقات الأطباء والحكماء**، تحقيق فؤاد سيد، مؤسسة الرسالة، مصر، ط. 2، 1985، ص.115.

[84] Ahmed DJEBBAR : *Ibn ʿAbdūn al-ʿUdhrī al-Qurtubī*, 2019, E.I.3, p.62.

[85] Ahmed Djebbar: *Similitudes et différences dans les pratiques mathématiques en pays d'Islam,* op. cit., pp. 5-6.

[86] من خلفاء بني أمية في قرطبة (حكم 350-366هـ/961-976 م).

[87] صاعد الأندلسي: **كتاب طبقات الأمم**، مرجع سابق، ص ص. 65-66.

[88] صاعد الأندلسي: **كتاب طبقات الأمم**، مرجع سابق، ص ص. 69-71.

[89] عبد الرحمن ابن خلدون: **مقدمة ابن خلدون**، مرجع سابق، ص. 252، ص. 256.

[90] أبو بكر الحصّار : **البيان والتذكار في صنعة عمل الغبار**، مخطوط جامعة بينسالفانيا، Bibliotheca Schoenbergensis, LJS. 293.

[91] ابن الياسمين الفاسي : **تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار**، تحقيق التهامي زمولي، رسالة ماجستير : **الأعمال الرياضية لابن الياسمين**، المدرسة العليا للأساتذة –القبة، أطروحة لنيل شهادة الماجستير في تاريخ الرياضيات، 1993.

[92] اسحاق بن يوسف الصردفي نسبة إلى صردف في اليمن، مؤلف كتاب **الكافي في الفرائض** الذي لم يتفقه احد من أهل اليمن في الفرائض بعد تصنيفه، كان عالما إماما متفننا في علوم كثيرة سيما الدور والفرائض والمساحة. أنظر أبو محمد الهجراني، الطيب بن عبد الله : **قلادة النحر في وفيات أعيان الدهر**، ج.1، عني به بوجمعة فكري و حالد زواري، جدة، دار المنهاج، ط.1، 2008، ص. 544.

[93] الصردفي، اسحاق بن يوسف : **كتاب مختصر الهندي**، مرجع سابق، ص.242، 116ظ.

[94] ابن البنا المراكشي: **رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب**، تقديم ودراسة وتحقيق محمد أبلاغ، منشورات كلية الآداب والعلوم الإنسانية، فاس، 1994.

[95] Ahmed DJEBBAR : *Du nombre pensé a la pensée du nombre, quelques aspects da la pratique arithmétique arabe et de ses prolongements en andalus au maghreb,* op. cit., pp. 306-307.

[96] Ahmed DJEBBAR : *Les mathématiques dans l'espace méditerranéen : l'exemple d'al-Andalus et du Maghreb,* op. cit., p10.